СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.М. Шмырин, И.А. Седых

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

2-е издание, исправленное

Липецкий государственный технический университет
Профобразование
Липецк • Саратов
2020

УДК 519
ББК 22.176
Ш75

Рецензенты:
Малыш В.Н. — д-р техн. наук, проф. Липецкого государственного педагогического университета;
кафедра математических, естественнонаучных и экономических дисциплин МОУ ВО «Институт права и экономики».

Шмырин, А.М.

Ш75 Дискретная математика и математическая логика : учебное пособие для СПО / А.М. Шмырин, И.А. Седых. — 2-е изд., испр. — Липецк : Изд-во Липецкого государственного технического университета ; Саратов : Профобразование, 2020. — 160 с. — (Среднее профессиональное образование). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-88247-960-1 (Изд-во ЛГТУ)
ISBN 978-5-4488-0751-0 (Профобразование)

В настоящем учебном пособии рассматриваются некоторые разделы дискретной математики и математической логики. В каждом разделе приведено большое количество иллюстраций и подробно разобранных примеров.

Подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Предназначено для изучения дисциплин «Дискретная математика», «Элементы математической логики», «Дискретная математика с элементами математической логики», «Математическая логика и теория алгоритмов» по укрупненным группам специальностей 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника» и 10.00.00 «Информационная безопасность».

УДК 519
ББК 22.176

ISBN 978-5-88247-960-1 (Изд-во ЛГТУ)
ISBN 978-5-4488-0751-0 (Профобразование)

© ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет», 2020
© Оформление. ООО «Профобразование», 2020
© Шмырин А.М., Седых И.А., 2014

Содержание

Введение 5
1. Множества 7
1.1. Множества и операции над ними. Аксиомы алгебры множеств 7
1.2. Комплекты 12
1.3. Нечёткие множества 13
2. Отношения и соответствия 14
2.1. Прямое произведение 14
2.2. Соответствия 15
2.3. Отношения 17
3. Графы 22
3.1. Определения графов 23
3.2. Элементы графов 27
3.3. Связность 29
3.4. Метрические характеристики графа 35
3.5. Виды графов и операции над графами 36
3.6. Деревья 41
3.7. Раскраска графов 45
3.8. Планарность 46
4. Алгоритмы на графах 55
4.1. Обходы графов 55
4.2. Остов минимального веса (кратчайший остов) 59
4.3. Кратчайшие пути 61
5. Транспортные сети 67
5.1. Поток в транспортной сети 68
5.2. Нахождение полного потока 70
5.3. Нахождение максимального потока 71
6. Математическая логика 73
6.1. Алгебра высказываний 73

6.2. Булевы функции 87
6.3. Минимизация булевых функций 118
7. Конечные автоматы 124
7.1. Пример конечного автомата 124
7.2. Понятие конечного автомата 128
7.3. Способы задания конечного автомата 130
7.4. Расширение функций переходов и выходов на множество входных слов 135
7.5. Автоматное отображение 136
7.6. Изоморфизм и эквивалентность конечных автоматов 137
7.7. Алгоритм Мили нахождения минимального конечного автомата 140
7.8. Частичные автоматы и их минимизация 143
7.9. Эквивалентность конечных автоматов Мили и Мура 150
7.10. Представление конечных автоматов матрицами соединений 152
7.11. Дерево конечного автомата 154
7.12. Построение схем из функциональных элементов для булевых конечных автоматов 155
Заключение 157
Библиографический список 158

Введение

Учебное пособие составлено в соответствии с государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования специально для студентов, изучающих дискретную математику и математическую логику.

Дискретная математика – одна из важнейших составляющих современной математики, которая выделилась в отдельную дисциплину в связи с развитием вычислительной техники и средств связи, занимается изучением свойств абстрактных дискретных объектов, возникающих как в различных разделах математики, так и в ее технических приложениях.

Главным отличием дискретной математики от классической непрерывной является отсутствие понятия непрерывности и предела последовательности. И хотя дискретная математика может иметь дело с бесконечными совокупностями объектов или их конфигураций, однако, обычно эти бесконечности являются счетными, в то время как в непрерывной математике бесконечности, как правило, континуальные.

Математическая логика – раздел математики, изучающий вопросы применения математических методов для решения логических задач и построения логических схем.

Прикладное значение математической логики в настоящее время очень велико. Математическая логика применяется для следующих целей: анализа и синтеза цифровых вычислительных машин и других дискретных автоматов, в том числе и интеллектуальных систем; анализа и синтеза формальных и машинных языков, для анализа естественного языка; выяснения существования механических процедур для решения задач определённого типа и других задач.

В настоящем пособии рассматриваются некоторые разделы дискретной математики и математической логики, наиболее востребованные, на взгляд авторов, для специалистов в области математического моделирования и систем управления:

1) множества;

2) отношения и соответствия;

3) графы;

4) алгоритмы на графах;

5) транспортные сети;

6) математическая логика;

7) конечные автоматы.

Учебное пособие написано в доступной форме. В каждом разделе приведено большое количество иллюстраций и подробно разобранных примеров.

1. Множества

1.1. Множества и операции над ними. Аксиомы алгебры множеств

Понятие «множество» – одно из фундаментальных понятий математики. Множество – совокупность элементов, обладающих двумя свойствами:

– все элементы различны;

– относительно каждого элемента можно сказать принадлежит или не принадлежит он этому множеству.

Множества обозначаются большими латинскими буквами, например A, B, C – множества. Элементы множества – маленькими латинскими буквами: $a, b, c \ldots$ Принадлежность элемента a множеству M обозначается $a \in M$, непринадлежность a множеству M обозначается $a \notin M$.

Множество A называется подмножеством множества B и обозначается $A \subseteq B$, если всякий элемент A является элементом B. При этом говорят, что B содержит или покрывает A ($\subseteq$–знак включения).

Множества A и B равны, если их элементы совпадают. Иначе говоря, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A часто называется строгим подмножеством B и обозначается $A \subset B$ ($\subset$–знак строгого включения).

Множества могут быть конечными (т.е. состоящими из конечного числа элементов) и бесконечными. Число элементов в конечном множестве A называется мощностью A и обозначается $|A|$.

Множество мощности 0, то есть не содержащее элементов, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Если все рассматриваемые в ходе данного рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества U, то это множество U называется универсальным для данного рассуждения.

1.1.1. Способы задания множеств

Множество может быть задано:

1) Перечислением (списком своих элементов). Списком можно задавать только конечные множества. Список обычно заключается в фигурные скобки, например $A = \{a, c, g, n\}$.

2) Порождающей процедурой. Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов или из других объектов. Например, множество всех чисел вида $\pi/2 \pm k\pi$, где $k \in N$. Здесь исходными объектами являются натуральные числа, а порождающей процедурой – вычисление, описанное формулой $\pi/2 \pm k\pi$.

Распространенной порождающей процедурой является образование множеств из других множеств с помощью операций над множествами, которые будут рассмотрены ниже.

3) Характеристической функцией. Множество можно полностью описать его характеристической функцией. Характеристическая функция множества A:

$$\chi_A = [\chi_A(a_1), ..., \chi_A(a_n)],\ n = |U|;$$

$$\chi_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases},\ a \in U.$$

Характеристическая функция универсального множества $\forall a \in U$ всегда равна 1.

Пример. $\chi_A = [1\ 0\ \ldots 1]$, $\chi_U = [1\ 1\ \ldots 1]$, $\chi_\varnothing = [0\ 0\ \ldots 0]$.

1.1.2. Операции над множествами

1) Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества A или B. Символически это можно записать так:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

В терминах характеристических функций эта операция описывается следующим образом:

$$\chi_{A\cup B}(a) = \max(\chi_A(a), \chi_B(a)).$$

2) Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами обоих множеств A и B. Символически это можно записать так:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

В терминах характеристических функций эта операция описывается следующим образом:

$$\chi_{A\cap B}(a) = \min(\chi_A(a), \chi_B(a)).$$

3) Относительным дополнением множества A до множества X называется множество $X \setminus A$, которое состоит из тех элементов множества X, которые не принадлежат множеству A:

$$X \setminus A = \{x : x \in X \text{ и } x \notin A\}.$$

Относительное дополнение выражается через другие операции:

$$X \setminus A = X \cap \overline{A}.$$

В терминах характеристических функций эта операция описывается следующим образом:

$$\chi_{X\setminus A}(a) = \max(\chi_X(a) - \chi_A(a), 0).$$

4) Абсолютным дополнением (или просто дополнением) множества A называется множество $\overline{A}$, которое состоит из всех элементов универсального множества U, которые не принадлежат множеству A:

$$\overline{A} = \{x : x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

В терминах характеристических функций эта операция описывается следующим образом:

$$\chi_{\overline{A}}(a) = 1 - \chi_A(a).$$

5) Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A + B$:

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

В терминах характеристических функций эта операция описывается следующим образом:

$$\chi_{A+B}(a) = \max(\chi_A(a) - \chi_B(a), \chi_B(a) - \chi_A(a)).$$

Приоритет операций: $\bar{}$, $\setminus$, $\cap$, $\cup$, $+$.

Для наглядного представления операций над множествами используют диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1).

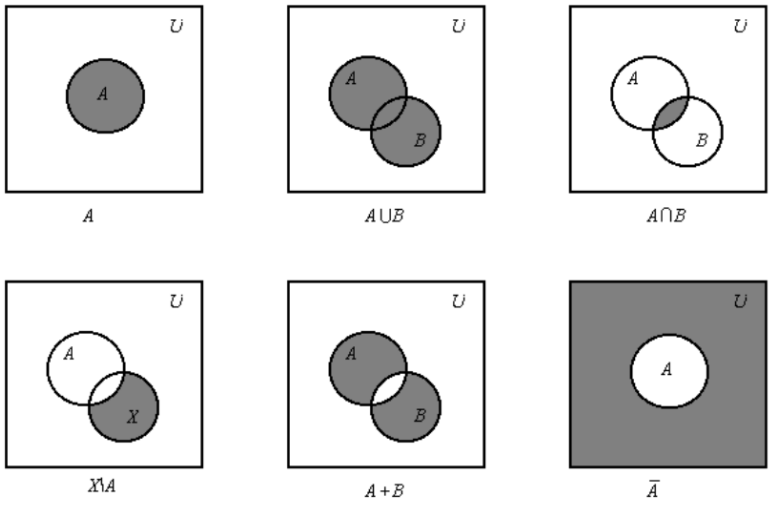


Рис. 1. Диаграммы Эйлера-Венна для операций над множествами

Универсальное множество U изображают в виде прямоугольника, а его подмножества – в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника.

1.1.3. Законы алгебры множеств

Для любых подмножеств A, B, C универсального множества U выполняются следующие тождества:

1) Законы дополнения:

$$\bar{U} = \varnothing,\ \bar{\varnothing} = U,$$
$$A \cup \bar{A} = U,\ A \cap \bar{A} = \varnothing,$$
$$\bar{\bar{A}} = A.$$

2) Законы поглощения:

$$A \cup U = U,\ A \cup \varnothing = A,$$
$$A \cap U = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,$$
$$A \cup A = A,\ A \cap A = A,$$
$$A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A.$$

3) Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

4) Законы коммутативности:

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

5) Законы ассоциативности:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

6) Законы дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

В справедливости перечисленных законов можно убедиться различными способами. Например, нарисовать диаграммы Эйлера-Венна для левой и правой частей равенства и убедиться, что они совпадают. Или можно провести формальное рассуждение для каждого равенства.

Рассмотрим равенство $A \cup A = A$. Возьмем произвольный элемент $x \in A \cup A$. По определению операции $\cup$ имеем $x \in A$ или $x \in A$. В любом случае $x \in A$. Взяв произвольный элемент из множества в левой части, обнаружили, что он принадлежит и правой части. Отсюда по определению включения множеств получаем, что $A \cup A \subset A$. Пусть теперь $x \in A$. Тогда очевидно, что $x \in A$ или $x \in A$. Таким образом, $A \subset A \cup A$. Следовательно, по определению равенства множеств $A \cup A = A$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для остальных равенств.

1.2. Комплекты

Комплект – совокупность элементов, обладающих двумя свойствами:

– элементы комплекта могут повторяться;

– относительно каждого элемента можно сказать принадлежит или не принадлежит он этому комплекту.

Комплекты обозначаются большими латинскими буквами с волной. Например, $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}$. Элементы комплекта обозначаются $\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c}\ldots$

Пример. $\widetilde{A}=\{a,a,b,b,c\}$.

Аналогом понятия характеристической функции множества служит понятие функции экземплярности комплекта ψ:

$$\psi_{\widetilde{A}}(\widetilde{a})=\begin{cases}k,\ \widetilde{a}\in\widetilde{A}\\ 0,\ \widetilde{a}\notin\widetilde{A}\end{cases},$$

где k – количество элементов $\widetilde{a}$ в комплекте $\widetilde{A}$.

Операции над комплектами

Операции над комплектами определим как операции над функциями экземплярности.

1) Объединение комплектов:

$$\psi_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(\widetilde{a})=\max(\psi_{\widetilde{A}}(\widetilde{a}),\psi_{\widetilde{B}}(\widetilde{a})).$$

Универсальный комплект $\widetilde{U}$ получается объединением всех комплектов, присутствующих в данной задаче.

2) Пересечение комплектов:

$$\psi_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(\widetilde{a})=\min(\psi_{\widetilde{A}}(\widetilde{a}),\psi_{\widetilde{B}}(\widetilde{a})).$$

3) Относительное дополнение комплекта $\widetilde{A}$ до комплекта $\widetilde{X}$:

$$\psi_{\widetilde{X}\setminus\widetilde{A}}(\widetilde{a})=\max(\psi_{\widetilde{X}}(\widetilde{a})-\psi_{\widetilde{A}}(\widetilde{a}),0).$$

4) Абсолютное дополнение (или просто дополнение) комплекта $\widetilde{A}$:

$$\psi_{\overline{\widetilde{A}}}(\widetilde{a})=\psi_{\widetilde{U}}(\widetilde{a})-\psi_{\widetilde{A}}(\widetilde{a}).$$

5) Симметрическая разность комплектов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$:

$$\psi_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}(\widetilde{a}) = \max(\psi_{\widetilde{A}}(\widetilde{a}) - \psi_{\widetilde{B}}(\widetilde{a}), \psi_{\widetilde{B}}(\widetilde{a}) - \psi_{\widetilde{A}}(\widetilde{a})).$$

1.3. Нечёткие множества

Нечеткое множество – совокупность элементов, обладающих двумя свойствами:

– в нечетком множестве нет повторяющихся элементов;

– относительно каждого элемента можно сказать, с какой степенью он принадлежит этому нечеткому множеству. Степень принадлежности элемента изменяется [0, 1].

Нечёткие множества обозначаются большими латинскими буквами с крышкой, например $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Элементы нечёткого множества обозначаются $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ …

Аналогом понятия характеристической функции множества служит понятие функции принадлежности нечёткого множества μ:

$$\mu_{\hat{A}}(\hat{a}) = s \in [0,1],$$

где s – степень принадлежности элемента $\hat{a}$ нечеткому множеству $\hat{A}$.

Операции над нечеткими множествами

Операции над нечеткими множествами определим как операции над функциями принадлежности.

1) Объединение нечетких множеств:

$$\mu_{\hat{A}\cup\hat{B}}(\hat{a}) = \max(\mu_{\hat{A}}(\hat{a}), \mu_{\hat{B}}(\hat{a})).$$

Универсальное нечеткое множество $\hat{U}$ получается объединением всех нечетких множеств, присутствующих в данной задаче.

2) Пересечение нечетких множеств:

$$\mu_{\hat{A}\cap\hat{B}}(\hat{a}) = \min(\mu_{\hat{A}}(\hat{a}), \mu_{\hat{B}}(\hat{a})).$$

3) Относительное дополнение нечеткого множества $\widetilde{A}$ до нечеткого множества $\widetilde{X}$:

$$\mu_{\widetilde{X}\setminus\widetilde{A}}(\widetilde{a}) = \max(\mu_{\widetilde{X}}(\widetilde{a}) - \mu_{\widetilde{A}}(\widetilde{a}), 0).$$

4) Абсолютное дополнение (или просто дополнение) нечеткого множества $\widetilde{A}$:

$$\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(\widetilde{a}) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(\widetilde{a}).$$

5) Симметрическая разность нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$:

$$\mu_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}(\widetilde{a}) = \max(\mu_{\widetilde{A}}(\widetilde{a}) - \mu_{\widetilde{B}}(\widetilde{a}), \mu_{\widetilde{B}}(\widetilde{a}) - \mu_{\widetilde{A}}(\widetilde{a})).$$

2. Отношения и соответствия

2.1. Прямое произведение

Прямым (декартовым) произведением множеств U и V (обозначается $U \times V$) называется множество упорядоченных пар (u, v) таких, что $u \in U, v \in V$, то есть:

$$U \times V = \{(u, v),\ u \in U,\ v \in V\}.$$

Если $U = V$, то обе координаты принадлежат U. Такое произведение обозначается U^2 и называется декартовым произведением.

Пример. Пусть $U = \{1, 3, 6\}$, $V = \{1, 2\}$.

Тогда $U \times V = \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (6,1), (6,2)\}$.

Графически данное прямое произведение представлено на рис. 2.

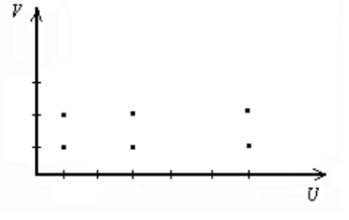


Рис. 2. Графическое представление прямого произведения

Степенью n множества A называется его прямое произведение самого на себя n раз:

$$A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n}.$$

2.2. Соответствия

Соответствием между множествами A и B называется подмножество $G \subseteq A \times B$. Если $(a,b) \in G$, то говорят, что b соответствует a при соответствии G.

Множество $пр_1 G$ – проекция G на множество А называется областью определения соответствия, множество $пр_2 G$ – областью значения соответствия.

Если $пр_1 G = A$, то соответствие называется всюду определенным (иначе соответствие называется частичным); если $пр_2 G = B$, то соответствие называется сюръективным.

Множество всех $b \in B$, соответствующих $a \in A$, называется образом a в A при соответствии G. Множество всех $a \in A$, которым соответствует $b \in B$, называется прообразом b в A при соответствии G.

Соответствие G называется функциональным (или однозначным), если образом любого элемента из $пр_1 G$ является единственный элемент из $пр_2 G$.

Соответствие G между A и B называется взаимнооднозначным, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и, кроме того, прообразом любого элемента из $пр_2 G$ является единственный элемент из $пр_1 G$.

Пусть $R_1 \subset A \times C$, $R_2 \subset C \times B$. Композицией двух соответствий R_1 и R_2 называется соответствие $R \subset A \times B$, определяемое следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 = \{(a,b) : a \in A, b \in B, \exists c \in C : aR_1c \text{ и } cR_2b\}.$$

Пример. Круг G радиуса 1 с центром (3, 2), т. е. множество пар действительных чисел (x, y), удовлетворяющих соотношению:

$(x-3)^2+(y-2)^2 \le 1$, задает соответствие между R и R (осью абсцисс и осью ординат). Графическое представление соответствия приведено на рис. 3.

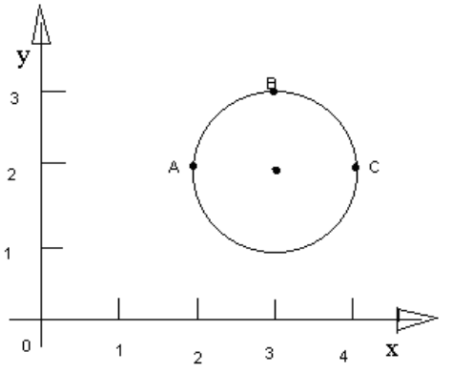


Рис. 3. Графическое представление соответствия

Образом числа 4 является число 2; образом 3 – отрезок [1, 3]; образом отрезка [2, 4] – отрезок [1, 3]. Отрезок [2, 4] служит прообразом числа 2. Данное соответствие не функционально.

Дуга ABC – функциональное соответствие. Напомним, что для задания соответствия надо указать не только множество G, но и множества A и B, т. е. указать, подмножеством какого именно прямого произведения является G.

В данном примере тот же круг G задает и другое соответствие между отрезком [2, 4] и [1, 3], т. е. $G \subseteq [2,4]\times[1,3]$. При этом по некоторым свойствам $G \subseteq R^2$ и $G \subseteq [2,4]\times[1,3]$ отличаются: второе соответствие в отличие от первого всюду определено и сюръективно.

Пример. Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множеством английских и русских слов. Это не функциональное соответствие, так как одному английскому слову могут ставиться в соответствие несколько русских слов.

Пример. Позиция на шахматной доске представляет собой взаимнооднозначное соответствие между множеством оставшихся на доске фигур и множеством занятых ими полей.

2.3. Отношения

Подмножество $R \subseteq A^n$ называется *n*-местным отношением на множестве A. Говорят, что $a_1,...,a_n$ находятся в отношении R, если $(a_1,...,a_n) \in R$.

Одноместное отношение – это просто подмножество *M*. Наиболее часто встречаются двухместные, или бинарные, отношения. Именно о них будем говорить дальше, слово «бинарные» будем опускать. Если a,b находятся в отношении R, то часто записывают: $a\ R\ b$.

Пример. Отношения на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$.

Отношение $\leq$ выполняется для (7, 9), (7, 7), а для (9, 7) не выполняется. Отношение «иметь общий делитель отличный от единицы» выполняется для пар (6, 9), (4, 2), (2, 4), (4, 4), но не выполняется для (7, 9), (9, 7). Отношение «a делитель b» выполняется для (2, 4), (4, 4), не выполняется для (4, 2), (7, 9).

Пример. Отношения на множестве точек действительной плоскости.

Отношение «находится на одинаковом расстоянии от начала координат» выполняется для пары точек $(3, 4)$ и $(-2, \sqrt{21})$, так как $r_1^2 = 9+16$, $r_2^2 = 4+21$, но не выполняется для пары точек (3, 4) и (1, 6), так как $r_1^2 = 9+16$, $r_2^2 = 1+36$.

Отношение «быть симметричным относительно оси *OX*» выполняется для всех пар точек $(x_1, y_1)\, u\, (x_2, y_2) : x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$.

Для задания отношений на конечных множествах обычно используют матрицы отношений. Матрица бинарного отношения на множестве $A = \{a_1,...,a_m\}$ – это квадратичная матрица C порядка m, в которой элементы определяются так:

$c_{ij} = 1$, если $a_i\ R\ a_j$;

$c_{ij} = 0$, иначе.

Пример. Для конечного множества $\{1,\ldots,6\}$ матрицы отношений:

«$\le$»

R	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1

«=»

R	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

«делится на »

R	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	0	1	0	0	0
4	1	1	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0
6	1	1	1	0	0	1

Рассмотрим некоторые виды отношений и операции над ними:

1) обратное отношение: $R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$;

2) дополнение отношения R: $\overline{R} = \{(a,b) \mid (b,a) \notin R\}$;

3) тождественное отношение: $I = \{(a,a) \mid a \in A\}$;

4) универсальное отношение: $U = \{(a,b) \mid a,b \in A\}$;

5) n-я степень отношения – это его композиция с самим собой n раз:

$$R^n = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{n}.$$

Соответственно $R^0 = I$, $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$, … $R^n = R^{n-1} \circ R$.

6) Пусть $R \subset A \times A$. Ядром отношения называется отношение $R \circ R^{-1}$.

2.3.1. Свойства отношений

1. *Рефлексивность*

Отношение R называется рефлексивным, если $\forall a \in A$ имеет место aRa. Главная диагональ его матрицы содержит только единицы.

Отношение R называется антирефлексивным, если $\forall a \in A$ не выполняется aRa. Главная диагональ матрицы содержит только нули.

Пример. Отношения «$\leq$» и «a делится на b» рефлексивны, «» – антирефлексивно. Отношение «быть симметричным относительно оси *OX*» не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным, так как точка плоскости симметрична сама себе, если лежит на оси X, и несимметрична иначе.

2. *Симметричность*

Отношение R называется симметричным, если $\forall a, b \in A$ из $aRb \Rightarrow bRa$ (т.е. для любой пары R выполняется либо в обе стороны, либо не выполняется вообще). Матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали.

Отношение R называется антисимметричным, если $\forall a, b \in A$ из $aRb \quad и \quad bRa \quad \Rightarrow \quad a = b$.

Пример. Отношение «быть симметричным относительно оси *OX*» является симметричным, так как если первая точка симметрична второй, то и вторая тоже симметрична первой. Отношение «$\leq$» антисимметрично: из того, что $a \leq b \quad и \quad b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b$. Отношение «$<$» не является ни симметричным, ни антисимметричным: из $a < b$ не следует $b < a$, кроме того, из ($a < b$ и $b < a$) не следует $a = b$.

3. *Транзитивность*

Отношение R называется транзитивным, если $\forall a, b, c \in A$ из $aRb \quad и \quad bRc \quad \Rightarrow \quad aRc$.

Пример. Отношение «<», «≤» транзитивны, отношение «пересекаться» нетранзитивно.

Теорема 1. Пусть $R \subset A \times A$ – отношение. Тогда:

1) R рефлексивно $\Leftrightarrow$ $I \subset R$;

2) R антирефлексивно $\Leftrightarrow$ $R \cap I = \varnothing$;

3) R симметрично $\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$;

4) R антисимметрично $\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subset I$;

5) R транзитивно $\Leftrightarrow R \circ R \subset R$.

Доказательство: $1 \Rightarrow$ Пусть отношение R рефлексивно. Тогда по определению $\forall a \in A \;\; aRa \Rightarrow \forall a \in A \;\; (a,a) \in R \Rightarrow I \subset R$.

$1 \Leftarrow$ Пусть $I \subset R$. Тогда $\forall a \in A \;\; (a,a) \in R \Rightarrow \forall a \in A \;\; aRa$.

$2 \Rightarrow$ От противного. Пусть $R \cap I \neq \varnothing \;\; \Rightarrow \;\; (\exists a \in A : aRa \,\&\, aIa) = (\exists a \in A : aRa) \Rightarrow$ отношение R не является антирефлексивным.

$2 \Leftarrow$ Пусть $R \cap I = \varnothing$. Тогда не $\exists a \in A \; aRa \Rightarrow \forall a \in A$ не выполняется aRa.

$3 \Rightarrow$ Пусть отношение R симметрично. Тогда по определению $\forall a,b \in A \;\; aRb \Rightarrow bRa \;\; \Rightarrow \forall a,b \in A \;\; (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$. Заметим, что по определению $(a,b) \in R = (b,a) \in R^{-1}$. Следовательно: $\forall a,b \in A \;\; (b,a) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R$.

Значит, $R^{-1} \subset R$. Аналогично доказывается, что $R \subset R^{-1} \;\Rightarrow\; R = R^{-1}$.

$3 \Leftarrow$ Пусть $R = R^{-1}$. Тогда $\forall a,b \in A \;\; ((a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R^{-1}$ и $(a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (a,b) \in R)$. По определению $(a,b) \in R = (b,a) \in R^{-1}$. Из всего этого следует, что $((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R) \Rightarrow \forall a,b \in A \;\; aRb \Rightarrow bRa$.

$4 \Rightarrow$ От противного. Пусть $R \cap R^{-1} \not\subset I \;\; \Rightarrow \;\; \exists a \neq b : aRb \;\&\; aR^{-1}b \;\; \Rightarrow \;\; \exists a \neq b : aRb \,\&\, bRa$. Следовательно, отношение R не является антирефлексивным.

$4 \Leftarrow$ Пусть $R \cap R^{-1} \subset I \;\Rightarrow\; (aRb \;\&\; aR^{-1}b \Rightarrow a = b) \Rightarrow (aRb \,\&\, bRa \Rightarrow a = b)$.

$5 \Rightarrow$ Пусть R транзитивно. Заметим, что $a(R \circ R)b = \exists c \in A : aRc \,\&\, cRb$ (по определению композиции) $\Rightarrow$ aRb (так как R транзитивно) $\Rightarrow R \circ R \subset R$

$5 \Leftarrow$ Пусть $R \circ R \subset R$ $\Rightarrow$ $(\forall a,b \in A \ (a,b) \in R \circ R \Rightarrow (a,b) \in R) \Rightarrow$ $(\forall a,b \ \exists c \in A : aRc \ \& \ cRb$ (по определению композиции) $\Rightarrow (a,b) \in R)$. $\triangleleft$

2.3.2. Отношение эквивалентности

Отношение называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пример. Отношение «=» на любом множестве является отношением эквивалентности.

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве M и $x \in M$. Подмножество элементов множества M, эквивалентных x, называется классом эквивалентности для $x : [x]_R = \{y : y \in M \,\&\, yRx\}$.

Пусть $\{C_1, C_2, ..., C_k\}$ – семейство подмножеств множества M, т.е. $\forall i \ C_i \subset M$. $\{C_1, C_2, ..., C_k\}$ называют разбиением множества M, если $M = \bigcup_i C_i$ и $\forall i \neq j \ C_i \bigcap C_j = \varnothing$.

Теорема 2. Всякое отношение эквивалентности на множестве M определяет разбиение этого множества на классы эквивалентности $C_1, C_2, ...$ такое, что $\forall C_i \neq \varnothing$. И обратно, всякое разбиение множества M, не содержащее пустых элементов, определяет отношение эквивалентности на множестве M.

Доказательство: $\Rightarrow$ Пусть на множестве M задано отношение эквивалентности R. Построение требуемого разбиения обеспечивается следующим алгоритмом.

Выберем элемент $a_1 \in M$ и образуем класс $C_1 \subseteq M$, состоящих из a_1 и всех элементов, эквивалентных a_1. Затем выберем элемент $a_2 \notin C_1$ и образуем класс C_2, состоящий из a_2 и всех элементов, эквивалентных a_2, и т. д.

Получится такая система классов $C_1, C_2, \ldots$, что $\forall x \in M\, \exists i : x \in C_i$, т. е. $\bigcup_i C_i = M$. Кроме того, классы попарно не пересекаются, т. е. $C_1, C_2, \ldots$ – разбиение.

$\Leftarrow$ Пусть $C_1, C_2, \ldots$ – разбиение множества M. Зададим отношение R следующим образом:

$$R = \{(a,b) : \exists i\, a \in C_i \ \&\ b \in C_i\}.$$

Докажем, что отношение R является отношением эквивалентности.

1. Рефлексивность: $M = \bigcup_i C_i \Rightarrow \forall a \in M\, \exists i : a \in C_i$;

$a \in C_i \Rightarrow a \in C_i \ \&\ a \in C_i \Rightarrow$ (по заданию R) aRa.

2. Симметричность: $aRb \Rightarrow \exists i\, a \in C_i \ \&\ b \in C_i \Rightarrow \exists i\, b \in C_i \ \&\ a \in C_i \Rightarrow bRa$.

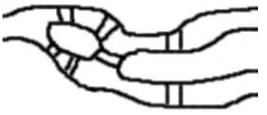
3. Транзитивность: $aRc \,\&\, cRb \Rightarrow \exists i\, a \in C_i \ \&\ c \in C_i \ \&\ \exists j\, c \in C_j \ \&\ b \in C_j$. А так как система классов не пересекается, то $i = j \Rightarrow \exists i\, a \in C_i \ \&\ b \in C_i \Rightarrow aRb$. $\triangleleft$

Пример. Отношение «=» – эквивалентность. Все классы состоят из одного элемента. Отношение «иметь один остаток от деления на 7» – эквивалентность. Первый класс – остаток 0, …, 7-й класс – остаток 6.

3. Графы

Теория графов неоднократно переоткрывалась разными авторами при решении различных прикладных задач.

Начало теории графов относят к 1736 г., когда Эйлер решил популярную в то время задачу о кенигсбергских мостах (сегодня Калининград). Обойти все четыре части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку (рис. 4).



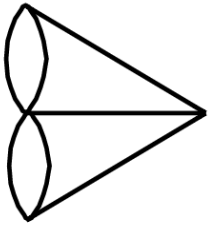


Рис. 4. Граф к задаче о кенигсбергских мостах

Еще одна известная задача – о трех домах и трех колодцах. Имеется 3 дома и 3 колодца. Провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались. Эта задача была решена Куратовским в 1930 г.

3.1. Определения графов

3.1.1. Основные понятия

Пусть V – непустое конечное множество. Обозначим через $V^{(2)}$ множество всех его двухэлементных подмножеств (порядок элементов в двухэлементных подмножествах не имеет значения), т.е. $V^{(2)} = \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}$.

Пара (V, E), где E – произвольное подмножество $V^{(2)}$, называется графом (неориентированным графом). Элементы множества V называются вершинами графа, а элементы множества E – ребрами.

Итак, граф – это конечное множество V вершин и множество E ребер.

Множества вершин и ребер графа G будем соответственно обозначать V_G и E_G. Вершины и ребра графа называются его элементами. Число вершин графа G называется его порядком и обозначается $|V_G|$. Если $|V_G| = n$, $|E_G| = m$, то граф G называют (n, m)-графом.

Говорят, что две вершины u и v графа смежны, если множество $\{u, v\}$ является ребром, и несмежны в противном случае.

Если $e = \{u, v\}$ – ребро, то вершины u и v называют его концами. Два ребра называются смежными, если они имеют общий конец. Вершина v и ребро e называются инцидентными, если v является концом ребра e.

Множество всех вершин графа G, смежных с некоторой вершиной v, называется окружением вершины v и обозначается через $N_G(v)$.

Граф порядка n называется помеченным, если его вершинам присвоены некоторые метки, например номера 1, 2, 3, …, n.

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. При этом точки соответствуют вершинам графа, а соединяющие пары точек линии – ребрам.

Пример. Рассмотрим (5, 6)-граф на рис. 5.

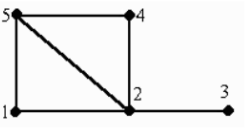


Рис. 5. Пример графа

$V_G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E_G = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$. Вершины 1 и 2 смежны, а 1 и 3 – несмежны. Вершина 1 и ребро $\{1, 2\}$ инцидентны, $N_G(2) = \{1, 3, 4, 5\}$.

3.1.2. Обобщения графов

Иногда приведенное выше определение графа оказывается недостаточным и приходится рассматривать более общие объекты, в которых вершины могут соединяться более чем одним ребром. Так возникает понятие мультиграф.

Мультиграф – это пара (V, E), где V – непустое множество вершин, а E – комплект неупорядоченных пар вершин, то есть в мультиграфе допускаются кратные ребра (рис. 6).

Рис. 6. Мультиграф

Дальнейшее обобщение состоит в том, что кроме кратных ребер допускаются еще петли, то есть ребра, соединяющие вершину саму с собой.

Псевдограф – это пара (V, E), где V – непустое множество вершин, а E – комплект неупорядоченных пар вершин, не обязательно различных (рис. 7).

Рис. 7. Псевдограф

Изучаются также ориентированные графы. Тогда множество $V^{(2)}$ заменяется декартовым произведением V^2, состоящим из упорядоченных пар элементов множества V.

Ориентированный граф (орграф) – это пара (V, A), где V – множество вершин, A – множество ориентированных ребер, которые называются дугами, $A \subseteq V^2$ (рис. 8).

Если $a = (v_1, v_2)$ – дуга, то вершина v_1 называется ее началом, а вершина v_2 – концом. На рисунке дуги обозначаются стрелками, указывающими направление от начала к концу.

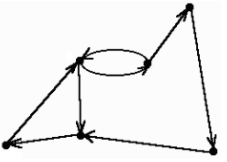


Рис. 8. Орграф

Аналогично определяются ориентированный мультиграф и псевдограф (рис. 9).

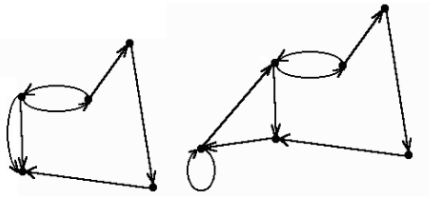


Рис. 9. Ориентированные мультиграф и псевдограф

3.1.3. Изоморфизм графов

Говорят, что два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ изоморфны (обозначается $G_1 \sim G_2$), если существует биекция $h \to V_1 : V_2$, сохраняющая смежность: если есть ребро $(u, v) \in E_1$, то есть и ребро $(h(u), h(v)) \in E_2$. И наоборот, если есть ребро $(u, v) \in E_2$, то есть и ребро $(h^{-1}(u), h^{-1}(v)) \in E_1$.

Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы эквивалентности по отношению изоморфизма. Изоморфные графы принято отождествлять, т.е. считать одинаковыми.

3.1.4. Матрицы смежности и инцидентности

Пусть G – помеченный неориентированный граф (возможно, мульти- или песевдограф) порядка n. Определим помеченную $n \times n$ матрицу $A = A(G)$, положив:

$$A_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ смежны;} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где k – число ребер $\{i, j\}$, при этом петля означает два ребра.

$A(G)$ называется матрицей смежности графа G. Это симметричная матрица.

Матрица смежности орграфа:

$$A_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если есть дуга } (i, j); \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где k – число дуг (i, j).

Пусть G – (n,m) неориентированный граф (возможно, мульти- или песевдограф), $V_G = \{1, 2, ..., n\}$, $E_G = \{e_1, ..., e_m\}$. Определим $n \times m$ матрицу $I = I(G)$:

$$I_{ml} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } m \text{ и ребро } e_l \text{ инциденты;} \\ 2, \text{если ребро } e_l \text{ - петля;} \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица I называется матрицей инцидентности графа G.

Пусть G – ориентированный граф. Тогда матрица инцидентности определяется так:

$$I_{ml} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } m \text{ - начало дуги } a_l; \\ -1, \text{если вершина } m \text{ - конец дуги } a_l; \\ \pm 1, \text{если вершина } m \text{ - начало и конец дуги } a_l; \\ 0, \text{если вершина } m \text{ и дуга } a_l \text{ не смежны.} \end{cases}$$

3.2. Элементы графов

3.2.1. Подграфы

Граф H называется подграфом (или частью) графа G, если $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ (при этом говорят, что H содержится в G). Подграф H называется остовным подграфом, если $V_H = V_G$.

Важный класс подграфов составляют подграфы, полученные в результате удаления вершин. Пусть v – вершина графа G. Граф $G_v = G - v$ получается из графа G в результате удаления вершины v и всех инцидентных ей ребер.

Аналогично из графа можно удалять ребро. Граф $G_e = G - e$ получается из графа G удалением ребра e, при этом концы ребра не удаляются.

Пусть X – множество каких-либо элементов (вершин и ребер) графа G. Подграф $G - X$ получается удалением из G всех вершин и ребер, входящих в X, а также всех ребер, хотя бы один конец которых принадлежит X.

3.2.2. Степени вершин графа

Степенью (или валентностью) вершины графа G называется число инцидентных ей ребер. Петля вносит в степень соответствующей вершины двойку. Будем обозначать степень вершины v через $\rho(v)$.

Максимальная и минимальная степени вершин графа G обозначаются символами $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно:

$$\Delta(G) = \max_{v \in V_G} \rho(v), \ \delta(G) = \min_{v \in V_G} \rho(v).$$

Список степеней вершин графа называется его степенной последовательностью. Порядок членов этой последовательности роли не играет.

Вершина степени 0 называется изолированной, вершина степени 1 – концевой (или висячей).

Рассмотрим сумму степеней всех вершин графа. Каждое ребро вносит в эту сумму двойку, поэтому справедлива следующая «лемма о рукопожатиях».

Лемма 1. Сумма степеней всех вершин графа – четное число, равное удвоенному числу ребер: $\sum_{v \in V_G} \rho(v) = 2 | E_G |$.

Для вершин ориентированного графа определяются две локальные степени: $\rho_1(v)$ – количество выходящих из v ребер, $\rho_2(v)$ – количество входящих в вершину v ребер. Петля дает 1 в обе эти степени.

3.2.3. Маршруты, цепи, циклы

Чередующаяся последовательность $v_1, e_1, ..., e_l, v_{l+1}$ вершин и ребер графа, такая что $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, $i = 1, ..., l$, называется маршрутом, соединяющим вершины v_1 и v_l (или (v_1, v_l)-маршрутом).

Очевидно, для обычных графов маршрут можно задать последовательностью его вершин: $v_1, ..., v_{l+1}$, а также последовательностью ребер: $e_1, ..., e_l$.

Маршрут называется цепью, если все его ребра различны. Простой цепью, если все его вершины различны (крайние вершины могут совпадать).

Маршрут называется циклическим, если $v_1 = v_l$. Циклическая цепь называется циклом, а циклическая простая цепь – простым циклом.

Число ребер в маршруте называется его длиной.

Пример. Рассмотрим граф на рис. 10.

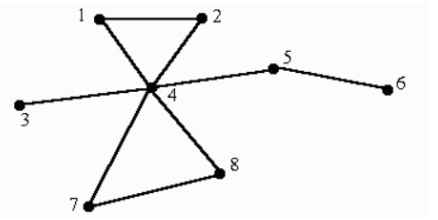


Рис. 10. Пример графа

В нем (1, 2) и (1, 2, 4, 7) являются простыми цепями; (1, 2, 4, 7, 8, 4) – цепь, не являющаяся простой; (1, 2, 4, 7, 8, 4, 2) – маршрут, не являющийся цепью; (1, 2, 4, 1) – простой цикл; (1, 2, 4, 7, 8, 4, 1) – цикл.

3.3. Связность

3.3.1. Связные графы. Компоненты связности

Граф называется связным, если любые две его несовпадающие вершины соединены цепью. На рис. 11-12 показаны соответственно связный и несвязный графы.

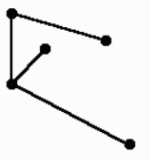


Рис. 11. Связный граф

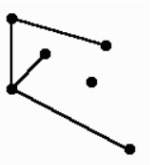


Рис. 12. Несвязный граф

Всякий максимальный связный подграф графа G называется компонентой связности графа G. Слово «максимальный» означает, что он не содержится в связном подграфе с большим числом элементов.

Пример. На рис. 13 приведен граф, содержащий 3 компоненты связности.

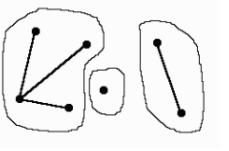


Рис. 13. Граф с 3-мя компонентами связности

Множество вершин компоненты связности называется областью связности графа.

Теорема 3. Для любого графа либо он сам, либо его дополнение является связным.

Доказательство: Пусть G – несвязный граф, A – одна из его областей связности, $B = V_G \setminus A$. Тогда для любых $a \in A$ и $b \in B$ в дополнительном графе $\overline{G}$ есть ребро ab. Следовательно, произвольная вершина из B соединена с a маршрутом длины 1, а каждая вершина из A (отличная от a) соединена с a маршрутом длины не более чем 2. Из определения вытекает, что $\overline{G}$ связен. $\triangleleft$

Лемма 2. Пусть G – связный граф, $e \in E_G$. Тогда:

1) если ребро e принадлежит какому-нибудь циклу графа G, то граф $G - e$ связен;

2) если ребро e не входит ни в какой цикл, то граф $G-e$ имеет ровно две компоненты.

Доказательство: 1) Пусть ребро $e=\{u,v\}$ принадлежит циклу C графа G. Заменив в каждой (x,y)-цепи, содержащей e, подцепь (u,e,v) (u,v)-цепью $C-e$, получим (x,y)-маршрут, не содержащий ребра e. Следовательно, в графе G любые две несовпадающие вершины соединены маршрутом, не проходящим через e. Но тогда и граф $G-e$ связен.

2) Пусть ребро $e=\{u,v\}$ не входит ни в какой цикл графа G. Тогда, очевидно, вершины u и v принадлежат разным компонентам связности графа $G-e$, например G_u и G_v соответственно. Для произвольной вершины $x\neq u$ в G существует (x,u)-маршрут. Если ребро e в этот маршрут не входит, то $x\in G_u$. В противном случае $x\in G_v$. $\triangleleft$

Теорема 4. Если число компонент связности графа G n-го порядка равно k, то $n-k\le m\le\dfrac{(n-k)(n-k+1)}{2}$, где m – число ребер.

Доказательство: Вначале рассмотрим верхнюю оценку. Пусть G – граф порядка n с k компонентами и максимальным для таких графов числом ребер. Тогда каждая его компонента является полным графом. Пусть далее K_p и K_q – две компоненты, $p\ge q>1$, v – вершина из второй компоненты. Удалив из графа все ребра, инцидентные вершине v, и соединив v ребром с каждой вершиной из первой компоненты, получим новый граф порядка n с тем же числом компонент и большим числом ребер. Последнее невозможно, стало быть, только одна из компонент может иметь порядок >1. Он равен $n-(k-1)=n-k+1$, и поэтому

$$m=\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Докажем нижнюю оценку: $n-k\le m$. Неравенство очевидно при $m=0$, так как $k=n$. Воспользуемся индукцией по m. Пусть $m>0$ и пусть для графов с меньшим, чем m, числом ребер соответствующее неравенство верно.

Рассмотрим граф $G-e$, где $e \in E_G$. Согласно лемме 2, число компонент этого графа равно k или $k+1$. Число ребер в нем $m-1$. По индуктивному предположению в обоих случаях $n-k-1 \le m-1$. Следовательно: $n-k \le m$. $\triangleleft$

3.3.2. Вершинная и реберная связность

Числом вершинной связности (или просто числом связности) κ (каппа) графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу. Если граф несвязный, то $\kappa = 0$.

Пример. Граф G на рис. 14 связен, но его связность можно нарушить, удалив вершину 3. Поэтому $\kappa(G) = 1$.

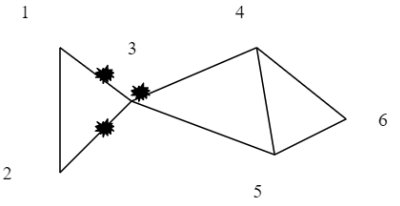


Рис. 14. Пример связного графа

Если же попытаться нарушить связность этого графа путем удаления ребер (а не вершин), то придется удалить не менее двух ребер. Введем еще одно определение.

Пусть G – граф порядка $n > 1$. Числом реберной связности $\lambda(G)$ графа G назовем наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Число реберной связности будем считать равным 0, если этот граф одновершинный или несвязный.

Вершина v графа G называется точкой сочленения (или разделяющей вершиной), если граф $(G-v)$ имеет больше компонент связности, чем G. Аналогично ребро графа называется мостом, если его удаление увеличивает число компонент связности. Таким образом, точки сочленения и мосты графа – это своего рода «узкие места» графа.

Пример. Граф на рис. 15 имеет 2 точки сочленения (4, 5) и 3 моста $\{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}$.

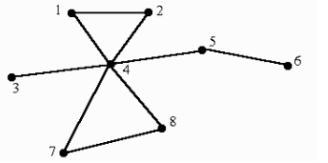


Рис. 15. Пример точек сочленения и мостов графа

Теорема 5. Для любого графа G верны неравенства: $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(g)$, где $\delta(G)$ – минимальная степень вершин графа.

3.3.3. Двусвязные графы

Неориентированный граф называется двусвязным, если он связен и не содержит точек сочленения. Произвольный максимально возможный двусвязный подграф графа G называется компонентой двусвязности или блоком этого графа.

Пример. Рассмотрим граф на рис. 16. Данный граф содержит 6 блоков.

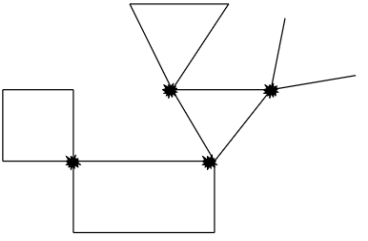


Рис. 16. Граф, содержащий 6 компонент связности

Неориентированный граф называется реберно-двусвязным, если он связный и не содержит мостов. Произвольный максимально возможный реберно-двусвязный подграф графа G называется листом этого графа.

3.3.4. Связность в орграфах

В неориентированном графе две вершины либо связаны, либо не связаны. В ориентированном графе отношение связанности несимметрично.

Пусть $G(V,E)$ – орграф, v_1 и v_2 – его вершины. Говорят, что две вершины v_1 и v_2 сильно связаны в орграфе G, если существует путь (ориентированная цепь) из v_1 в v_2 и из v_2 в v_1.

Говорят, что две вершины v_1 и v_2 односторонне связаны в орграфе G, если существует путь (ориентированная цепь) либо из v_1 в v_2, либо из v_2 в v_1.

Говорят, что две вершины v_1 и v_2 слабо связаны в орграфе G, если они связаны в графе G', полученном из G отменой ориентации ребер.

Если все вершины в орграфе сильно (односторонне, слабо) связаны, то орграф называется сильно (односторонне, слабо) связанным.

Очевидно, что сильная связанность влечет одностороннюю связанность, которая влечет слабую связанность. Обратное неверно.

Пример. На рис. 17 слева направо представлены: сильная, односторонняя, слабая связанность.

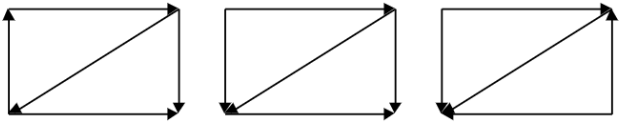


Рис. 17. Виды связанности в орграфе

Компонентой сильной связности (КСС) орграфа G называется его максимально сильно связные подграфы. Каждая вершина графа принадлежит только одной КСС. Если вершина не связана с другими, то считаем, что она сама образует КСС.

3.4. Метрические характеристики графа

Пусть G – связный граф, а u и v – две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшей (u,v)-цепи называется расстоянием между вершинами u и v и обозначается $d(u,v)$, а сама кратчайшая цепь обозначается $\langle u,v\rangle$ и называется геодезической.

Положим, что $d(u,u)=0$. Если не существует (u,v)-цепи, то $d(u,v)=\infty$.

Для фиксированной вершины u величина $e(u)=\max\limits_{v\in V_G} d(u,v)$ называется эксцентриситетом вершины u.

Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется диаметром графа G и обозначается $d(G)$. Тем самым $d(G)=\max\limits_{u\in V_G} e(u)$.

Вершина v называется периферийной, если $e(v)=d(G)$. Простая цепь длины $d(G)$ называется диаметральной цепью.

Пример. Рассмотрим граф на рис. 18. Для него $d(1,2)=1$, $d(1,3)=2$, $e(1)=2$, $e(2)=1$, $d(G)=2$. Все вершины являются периферийными, кроме второй. Диаметральная цепь – (1, 2, 3).

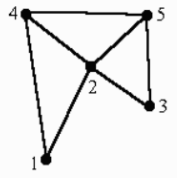


Рис. 18. Пример графа с периферийными вершинами

Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его радиусом и обозначается через $r(G)$:

$$r(G)=\min_{u\in V_G} e(u)=\min_{u\in V_g}\max_{v\in V_G} d(u,v).$$

Вершина v называется центральной, если $e(v)=r(G)$. Множество всех центральных вершин графа называется его центром.

Граф может иметь единственную центральную вершину или несколько центральных вершин. Наконец, центр графа может совпадать с множеством всех вершин. Например, центр простой цепи P_n при четном числе вершин состоит ровно из двух вершин, а при нечетном числе вершин – из одной, для цикла C_n все вершины являются центральными.

Метрические характеристики графа удобно определять с помощью матрицы расстояний D размера $n \times n$: $D_{ij} = d(i, j)$.

Замечание. Если граф несвязный, то все метрические характеристики находятся для каждой компоненты связности отдельно.

3.5. Виды графов и операции над графами

3.5.1. Виды графов

Граф G называется полным, если любые две его вершины смежны. Полный граф порядка n обозначается символом K_n. Число ребер в нем равно $| E_G | = n(n-1)/2$.

На рис. 19 приведены полные графы $K_1 - K_5$.

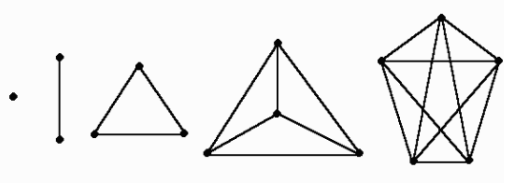


Рис. 19. Полные графы

Граф G называется пустым, если в нем нет ребер. Пустой граф порядка n обозначается символом O_n. Пустой граф O_3 показан на рис. 20.

Рис. 20. Пустой граф

Простая цепь обозначается P_n, в ней $| V_G | = n$, $| E_G | = (n-1)$. На рис. 21 приведены простые цепи $P_2 - P_4$.

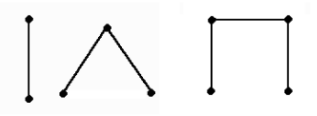


Рис. 21. Простые цепи

Простой цикл обозначается C_n, в нем $|V_G|=n$, $|E_G|=n$. На рис. 22 показаны простые циклы $C_3 - C_4$.

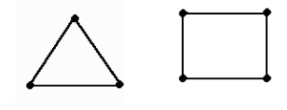


Рис. 22. Простые циклы

Граф $G(V,E)$ называется двудольным, если существует такое разбиение множества его вершин V на два непересекающихся множества V_1 и V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$), причем всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (т.е. соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2).

Множества V_1 и V_2 называются долями двудольного графа. Двудольный граф, доли которого состоят из p и q вершин, обозначается символом $D_{p,q}$.

Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется полным двудольным. Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и q вершин, обозначается символом $K_{p,q}$. На рис. 23 слева приведен двудольный граф $D_{3,2}$, справа – полный двудольный граф $K_{3,2}$.

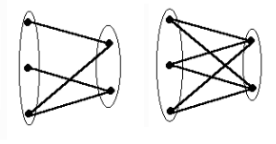


Рис. 23. Двудольные графы

Теорема 6. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину.

Доказательство: $\Rightarrow$ От противного. Пусть $G(V_1,V_2;E)$ – двудольный граф, $v_1, v_2, ..., v_{2k+1}, v_1$ – простой цикл нечетной длины. Пусть

$v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, …, $v_{2k+1} \in V_1$. Тогда $v_1, v_{2k+1} \in V_1$ и эти вершины смежны, т.е. $(v_1, v_{2k+1}) \in E$. А это противоречит двудольности.

$\Leftarrow$ Пусть в графе G есть только циклы четной длины. Докажем, что он двудольный. Можно считать, что G – связный граф, поскольку каждую компоненту связности можно рассматривать отдельно. Разобьем множество V на V_1 и V_2 следующим образом.

Любую вершину v поместим в первую долю V_1. Вторая доля пока пустая.

Далее перебираем все остальные вершины графа $u \in V$. Если $d(v,u)$ – четно, то $V_1 = V_1 \cup u$, иначе $V_2 = V_2 \cup u$.

Далее от противного. Пусть есть две вершины в одной доле, соединенные ребром. Пусть для определенности $u, w \in V_2$ и $(u,w) \in E$.

Рассмотрим геодезические цепи $\langle v,u \rangle$ и $\langle v,w \rangle$. Тогда длины $|\langle v,u \rangle|$ и $|\langle v,w \rangle|$ нечетны. Эти цепи имеют хотя бы одну общую вершину v. Рассмотрим еще одну общую вершину этих цепей и обозначим ее v' (возможно, $v' = v$). Тогда $|\langle v',u \rangle| + |\langle v',w \rangle| = |\langle v,u \rangle| + |\langle v,w \rangle| - 2|\langle v,v' \rangle|$ – четно, а цикл $v', ..., u, w, ..., v'$ – простой цикл нечетной длины $|\langle v',u \rangle| + |\langle v',w \rangle| + |\langle u,w \rangle|$, что противоречит условию.

Если же $u, w \in V_1$, т.е. $|\langle v,u \rangle|$ и $|\langle v,w \rangle|$ четны, и $(u,w) \in E$. Тогда также $v', ..., u, w, ..., v'$ – простой цикл нечетной длины. $\triangleleft$

3.5.2. Реберный граф

Для произвольного графа G реберный граф $L(G)$ определяется следующими двумя условиями:

1) $V_{L(G)} = E_G$;

2) вершины e_1 и e_2 смежны в $L(G)$ тогда и только тогда, когда ребра e_1 и e_2 смежны в G. На рис. 24 слева приведен исходный граф, справа – его реберный граф.

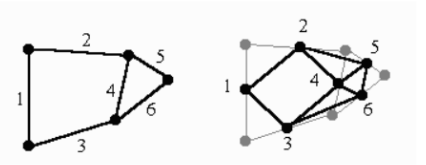


Рис. 24. Пример реберного графа

3.5.3. Операции над графами

1) Объединение. Граф H называется объединением (или наложением) графов F и G, если $V_H = V_F \cup V_G$, $E_H = E_F \cup E_G$. В этом случае пишут $H = F \cup G$.

Объединение называется дизъюнктивным, если $V_F \cap V_G = \varnothing$. Аналогично определяется объединение и дизъюнктивное объединение любого множества графов, причем в последнем случае никакие два из объединяемых графов не должны иметь общих вершин.

Пример объединения графов приведен на рис. 25.

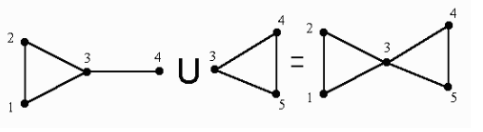


Рис. 25. Объединение графов

2) Дополнение графа до полного (или просто дополнение). Граф $\overline{G}$ называется дополнением графа G до полного, если у него $V_{\overline{G}} = V_G$, а $E_{\overline{G}}$ определяется следующим образом: вершины u и v смежны, если они не являются смежными в графе G. На рис. 26 слева приведен исходный граф, справа – его дополнение.

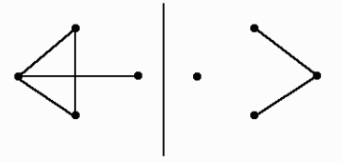


Рис. 26. Дополнение графа

3) Дополнение подграфа F до графа G. Пусть F – подграф графа G.

Граф H называется дополнением F до G, если у него $V_H = V_G$, а E_H определяется следующим образом: вершины u и v смежны, если они не смежны в графе F, но смежны в G.

4) Соединение. Граф H называется соединением графов F и G, если $V_H = V_F \cup V_G$, $E_H = E_F \cup E_G \cup E_{FG}$, где E_{FG} – множество всех дуг, соединяющих вершины из разных графов. В этом случае пишут $H = F + G$. На рис. 27 слева приведены два исходных графа, справа – их соединение.

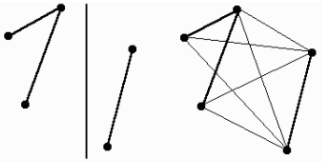


Рис. 27. Соединение графов

5) Произведение. Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ – два графа.

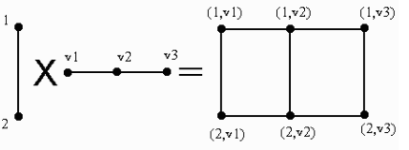


Рис. 28. Произведение графов

Произведением этих графов называется граф $G = G_1 \times G_2$, для которого $V_G = V_1 \times V_2$ – декартово произведение множеств вершин исходных графов, а E_G определяется следующим образом: вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в графе G тогда и только тогда, когда или $u_1 = v_1$, а u_2 и v_2 смежны в G_2, или $u_2 = v_2$, а u_1 и v_1 смежны в G_1. На рис. 28 показано произведение графов.

3.6. Деревья

3.6.1. Определения

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф без циклов называется лесом (или ациклическим графом). Таким образом, компонентами леса являются деревья. Граф, в котором выполняется равенство $m = n - 1$, называется древовидным.

На рис. 29 изображены все деревья с 6 вершинами.

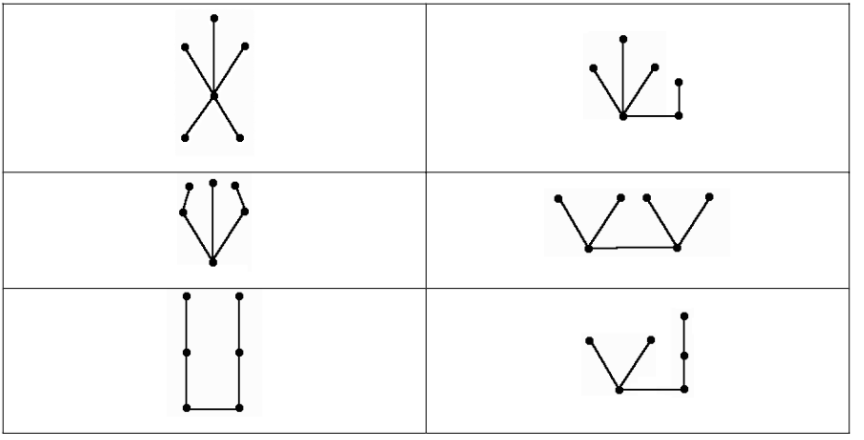


Рис. 29. Деревья с 6 вершинами

Пусть G – ациклический граф. Если в нем при соединении ребром любой пары несмежных вершин получится граф ровно с одним простым циклом, то граф G будем называть субциклическим.

3.6.2. Основные свойства деревьев

Следующая теорема устанавливает, что два из четырех свойств – связность, ацикличность, древовидность и субцикличность – характеризуют граф как дерево.

Теорема 7. Для (n, m)-графа G следующие утверждения эквивалентны:

1) G – дерево;

2) Любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь;

3) G – связный граф, любое ребро которого – мост;

4) G – связный граф и древовидный;

5) G – ациклический граф (лес) и древовидный;

6) G – ациклический граф (лес) и субцикличекий;

7) G – связный, субциклический и неполный, $n \geq 3$;

8) G – древовидный и субциклический, исключая $G = K_1 \cup K_3$ и $G = K_2 \cup K_3$.

Доказательство: $(1 \Rightarrow 2)$: если G – дерево, то любые две его несовпадающие вершины соединяет единственная простая цепь.

От противного. Пусть существуют две цепи $\langle u, v \rangle$ (рис. 30). Тогда w_1, w_2 – простой цикл и G не является деревом, что противоречит условию.

Рис. 30. Граф с двумя простыми цепями

$(2 \Rightarrow 3)$: если любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь, то G– связный граф, любое ребро которого – мост.

Имеем: $\forall u, v \exists! \langle u, v \rangle \Rightarrow k(G) = 1$ (число компонент связности). Далее от противного. Пусть ребро x – не мост. Тогда в графе $G - x$ концы этого ребра связаны цепью. Само ребро x в исходном графе – вторая цепь, что противоречит условию.

$(3 \Rightarrow 4)$: если G– связный граф, любое ребро которого – мост, то G – связный и древовидный ($m = n - 1$).

Индукция по n (числу вершин). Если $n = 1$, то $m = 0$ (число ребер). Пусть равенство $m = n - 1$ выполняется для всех графов G с числом вершин меньше n. Докажем, что оно выполняется и для n вершин.

Удалим из G ребро x, являющееся мостом. Получим две компоненты связности G' и G'', для которых верно равенство $m = n - 1$, т.е. $m' = n' - 1$, $m'' = n'' - 1$. Тогда $m = m' + m'' + 1 = n' - 1 + n'' - 1 + 1 = n - 1$.

$(4 \Rightarrow 5)$: Если G – связный и древовидный $(m = n-1)$, то G – ациклический граф (лес) и древовидный $(m = n-1)$.

От противного. Пусть есть цикл с p вершинами и p ребрами. Остальные $n-p$ вершин связаны с этим циклом ребрами, так как граф связный. Следовательно, $m \geq n$, что противоречит условию $m = n-1$.

Остальные пункты доказываются аналогично. $\triangleleft$

3.6.3. Ориентированные деревья

Ориентированным деревом (или ордеревом, или корневым деревом) называется орграф со следующими свойствами:

1) существует единственный узел, в который не входит ни один другой узел; он называется корнем ордерева;

2) во все остальные узлы входит только по одному узлу;

3) каждый узел достижим из корня.

Теорема 8. Ордерево обладает следующими свойствами:

1) $m = n-1$;

2) если в ордереве отменить ориентацию ребер, то получится обычное дерево;

3) для каждого узла существует единственный путь, ведущий в этот узел из корня;

4) подграф, определяемый множеством узлов, достижимых из узла v, является ордеревом с корнем v. Это ордерево называется поддеревом узла v.

Концевая вершина ордерева называется листом. Путь из корня в лист называется ветвью. Длина наибольшей ветви ордерева называется высотой. Уровень узла ордерева – это расстояние от корня до узла. Сам корень имеет уровень 0. Узлы одного уровня образуют ярус дерева.

3.6.4. Деревья покрытия. Остовы

Пусть G – связный граф. Деревом покрытия графа G называется подграф, который является деревом и множество вершин которого совпадает с множеством вершин графа G. Заметим, что связный граф может иметь много различных деревьев покрытия.

Теорема 9. Каждый связный граф содержит в себе дерево покрытия.

Доказательство: Пусть G – связный граф. Если G не содержит циклов, то доказывать ничего не надо, ибо G является деревом покрытия.

Предположим, что G содержит цикл. Удаление любого ребра из цикла дает граф, который еще остается связным. Если новый граф еще содержит цикл, то опять удалим ребро этого цикла. Продолжим процесс до тех пор, пока результирующий граф G' не будет содержать ни одного цикла. Мы не удалили ни одной вершины из G, и связность графа не нарушилась при удалении ребер. Итак, G' – связный и является деревом покрытия G. $\triangleleft$

Пусть G – несвязный граф. Остовом (или каркасом) графа G называется объединение деревьев покрытия всех его компонент связности. Очевидно, что в каждом графе существует остов: разрушая в каждой компоненте связности циклы, т.е. удаляя лишние ребра, придем к остову.

Число $\nu(G) = m(G) - n(G) + k(G)$ называется цикломатическим числом графа G.

Следствие. Число ребер произвольного графа G, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно $m - n + k$.

Доказательство: Если (n_1, m_1)-граф H является одной из компонент связности графа G, то для превращения его в остовное дерево нужно удалить $m_1 - (n_1 - 1)$ подходящих ребер, так как в дереве число ребер $m_1 = n_1 - 1$. Суммируя по всем k компонентам, получим требуемое. $\triangleleft$

3.7. Раскраска графов

Пусть G – некоторый граф, k – натуральное число. Произвольная функция вида $f : V_G \to \{1, ..., k\}$ называется k-раскраской графа G.

Раскраска называется правильной, если $f(u) \neq f(v)$ для любых смежных вершин u и v.

Граф, для которого существует правильная k-раскраска, называется k-раскрашиваемым (или просто раскрашиваемым k цветами).

Правильную k-раскраску графа можно трактовать как окрашивание каждой его вершины в один из k цветов, при этом смежные вершины должны получить различные цвета.

Пример. На рис. 31 приведена одна из правильных 4-раскрасок изображенного графа. Меньшим числом цветов этот граф раскрасить правильно нельзя.

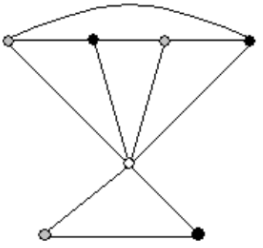


Рис. 31. Правильная 4-раскраска графа

Минимальное число k, при котором граф G является k-раскрашиваемым, называется хроматическим числом этого графа и обозначается $\chi(G)$. Если $\chi(G) = k$, то граф G называется k-хроматическим. Правильная k-раскраска G при $k = \chi(G)$ называется минимальной раскраской.

Очевидно, что граф является 1-хроматическим, тогда и только тогда, когда он пустой, а 2-хроматическим, когда он двудольный.

Задачи определения хроматического числа и построения минимальной раскраски произвольного графа является очень сложными, эффективные алгоритмы их решения неизвестны.

Рассмотрим простой алгоритм построения правильной раскраски, в ряде случаев приводящий к раскраскам, близким к минимальным.

Алгоритм правильной раскраски

1) К произвольной вершине V_1 графа G применим цвет 1.

2) Если вершины $V_1,...,V_i$ раскрашены l цветами $1,2,...,l$, $l \le i$, то новой произвольно взятой вершине V_{i+1} припишем цвет, не использованный при раскраске вершин из её окружения (т.е. инцидентных ей вершин).

Раскраска, к которой приводит данный алгоритм, называется последовательной. Для некоторых графов (например, для полных двудольных) последовательная раскраска является минимальной. В общем случае это не так.

3.8. Планарность

3.8.1. Плоские и планарные графы

Во многих случаях не имеет значение, как изображать граф. Однако встречаются ситуации, когда важно выяснить, возможно ли нарисовать граф на плоскости так, чтобы его изображение удовлетворяло определённым требованиям. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем электрические цепи наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

Граф называется плоским, если его вершины – это точки, лежащие на плоскости, а рёбра – линии на плоскости, которые не пересекаются друг с другом. Граф называется планарным, если он изоморфен плоскому графу. На рис. 32 приведены примеры плоских графов.

Рис. 32. Плоские графы

Пример. Изображенный на рис. 33 граф K_4 является планарным, так как его можно представить в виде плоского (рис. 34).

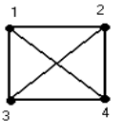


Рис. 33. Граф K_4

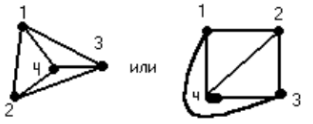


Рис. 34. Представление графа K_4 в виде плоского

Следующая классическая головоломка наводит на мысль, что существуют не только планарные графы.

Задача о 3-х домах и 3-х колодцах. Имеются 3 дома (1, 2, 3) и 3 колодца (4, 5, 6), примером является граф $K_{3,3}$, изображенный на рис. 35.

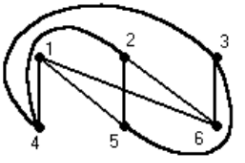


Рис. 35. Граф $K_{3,3}$

Каждый хозяин пользуется любым из 3-х колодцев. В некоторый момент обитатели домов решили проложить дорожки до колодцев так, чтобы дорожки не пересекались. Возникает вопрос, возможно ли это. Все попытки нарисовать 9 непересекающихся дорожек оканчиваются неудачей. При этом легко нарисовать 8 дорожек (непересекающихся), но 9-я обязательно пересечет хотя бы одну из них, т.е. граф $К_{3,3}$ не является планарным.

3.8.2. Грани плоского графа. Формула Эйлера

Пусть G – связный плоский граф. Область, ограниченная ребрами в графе G и не содержащая внутри себя вершин и ребер, называется гранью. Внешняя часть плоскости также образует грань. Таким образом, плоский граф разделяет плоскость на грани.

Границей грани будем считать множество вершин и рёбер, принадлежащих этой грани.

Пример. На рис. 36 приведен граф с 4-мя гранями. Плоский граф имеет единственную неограниченную грань (4). Такая грань называется внешней, а остальные грани – внутренними.

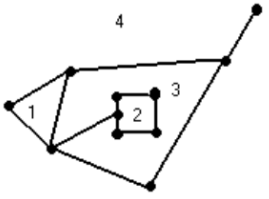


Рис. 36. Граф с 4-мя гранями

Теорема 10. Для всякого связного плоского графа G верно равенство $n - m + f = 2$, где f – число граней плоского графа (теорема Эйлера).

Доказательство: Применим метод математической индукции. Если $m = 0$, то $n = 1, f = 1$, т.е. теорема выполняется.

Предположим, что теорема выполняется для всех графов с числом рёбер <= m, т.е. $n - m + f = 2$. Добавим еще одно ребро. Если добавляемое ребро соединяет существующие вершины, то $m' = m + 1$, $n' = n$, $f' = f + 1$. Тогда $n' - m' + f' = n - m - 1 + f + 1 = n - m + f = 2$. Если добавляемое ребро соединяет существующую вершину с новой, то $m' = m + 1$, $n' = n + 1$, $f' = f$. Тогда $n' - m' + f' = n + 1 - m - 1 + f = n - m + f = 2$. $\triangleleft$

Теорема 11. Если G связный планарный граф ($n>3$), то $m \le 3n-6$.

Доказательство: Пусть G является (n,m)-графом. Преобразуем G следующим образом. Ребра, находящиеся на границе граней, продублируем. Тогда в полученном графе G' $m' \le 2m$. Кроме того, каждое ребро принадлежит ровно одной грани, а каждая грань ограничена 3-мя и более ребрами. Тогда $3f \le m' \le 2m$, т.е. в исходном графе $3f \le 2m$. По предыдущей теореме имеем

$$2 = n - m + f \le n - m + 2m/3 \Rightarrow 3n - 3m + 2m \ge 6 \Rightarrow m \le 3n - 6. \triangleleft$$

Следствие. K_5 и $K_{3,3}$ непланарны.

Доказательство: 1. Рассмотрим K_5. Имеем $n=5$, $m=10$. Если K_5 планарен, то $m=10 \le 3n-6=9$. Получили противоречие.

2. Рассмотрим $K_{3,3}$. Имеем $n=6$, $m=9$. В этом графе нет треугольников, значит, если этот граф планарен, то в его плоской укладке каждая грань ограничена по крайней мере четырьмя ребрами. Следовательно, $4f \le 2m$ или $2f \le m$. По формуле Эйлера $6-9+f=2$, отсюда $f=5$. Имеем $2f=10 \le m=9$. Получили противоречие. $\triangleleft$

3.8.3. Теорема Потрягина-Куратовского

Введем операцию подразбиения ребра $e=\{a,b\}$ графа. Она состоит в следующем: из графа удалятся ребро e и добавляются два новых ребра $e_1=\{a,v\}$ и $e_2=\{v,b\}$, где v – новая вершина.

Два графа называются гомеоморфными, если оба они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его рёбер. Если граф планарный, то любой гомеоморфный ему граф также является планарным.

Исторически первым критерием планарности графов является критерий, доказанный Потрягиным (1927 г.) и Куратовским (1930 г.) независимо друг от друга. Рассмотрим теорему Потрягина-Куратовского.

Теорема 12. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

3.8.4. Алгоритм укладки графа на плоскости

Рассмотренный выше критерий планарности таков, что если даже удалось установить планарность, то нет информации о том, как строить его укладку на плоскости (как его расположить на плоскости без пересечения рёбер).

В то же время при решении практических задач недостаточно знать, что граф планарен, а необходимо построить его плоское изображение.

Всё это вызвало появление алгоритмов, которые не только проверяют граф на планарность, но и строят его плоскую укладку, если это возможно. Рассмотрим один из этих алгоритмов.

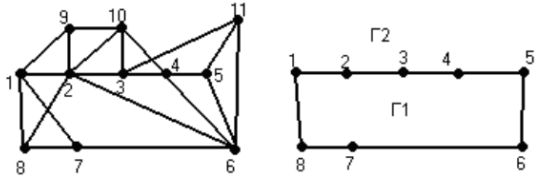
Введем ряд определений. Пусть построена некоторая укладка подграфа $\widetilde{G}$ графа G. Сегментом S относительно $\widetilde{G}$ (или просто сегментом) будем называть подграф графа G одного из двух видов:

1) ребро $e = \{u,v\} \in E_G$ такое, что $e \notin E_{\widetilde{G}}$, $\{u,v\} \in V_{\widetilde{G}}$;

2) компоненту связности графа $G - \widetilde{G}$, дополненную всеми рёбрами графа G, инцидентными ее вершинам (взятой компоненты), и концами этих рёбер.

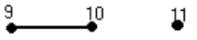
Вершину v сегмента S относительно $\widetilde{G}$ будем называть контактной, если $v \in V_{\widetilde{G}}$.

Пример. На рис. 37 слева изображен исходный граф G, справа – укладка его подграфа $\widetilde{G}$. На рис. 38 представлено дополнение подграфа $\widetilde{G}$ до графа G, а на рис. 39 – сегменты S относительно $\widetilde{G}$ первого и второго видов. Контактные вершины сегментов обведены в кружки.



G $\widetilde{G}$

Рис. 37. Граф и укладка его подграфа



$G - \widetilde{G}$

Рис. 38. Дополнение подграфа до исходного графа

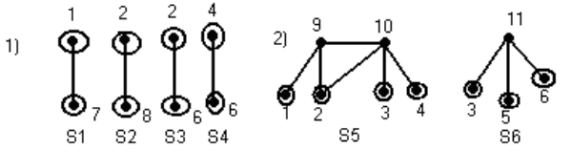


Рис. 39. Сегменты

Так как $\widetilde{G}$ плоский, то он разбивает плоскость на грани. Допустимой гранью для сегмента S относительно $\widetilde{G}$ называется грань Γ графа $\widetilde{G}$, содержащая все контактные вершины сегмента S. Через $\Gamma(S)$ будем обозначать множество допустимых граней для S. Может оказаться, что $\Gamma(S) = \varnothing$.

Пример. Для графа на рис. 37 $\Gamma(S_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, $i = 1, ..., 6$.

Простую цепь L сегмента S, соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин, назовём α-цепью.

Алгоритм укладки графа на плоскости

1) Выберем некоторый простой цикл C графа G и уложим его на плоскости. Положим $\widetilde{G} = C$.

2) Найдем грани $\widetilde{G}$ и сегменты относительно $\widetilde{G}$. Если множество сегментов пусто, то перейдем к п. 8.

3) Для каждого сегмента S определим множество $\Gamma(S)$.

4) Если существует сегмент S, для которого $\Gamma(S) = \varnothing$, то перейдем к п. 9, иначе – к п. 5.

5) Если существует сегмент S, для которого имеется единственная грань Γ, то перейдём к п. 7, иначе – к п. 6.

6) Для некоторого сегмента $S(\Gamma(S) > 1)$ выбираем произвольно допустимую грань Γ.

7) Поместим произвольную α-цепь $L \in S$ в грань Γ, заменим $\widetilde{G}$ на $\widetilde{G} \cup L$ и перейдем к п. 2.

8) Построена укладка $\widetilde{G}$ графа G на плоскости. Конец.

9) Граф не является планарным, построить его укладку невозможно. Конец.

Пример. Рассмотрим граф на рис. 40.

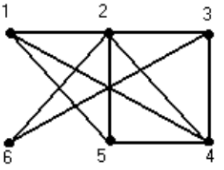


Рис. 40. Исходный граф G

Уложим сначала цикл $C = \{1, 2, 3, 4, 1\}$, который разбивает плоскость на две грани Γ_1 и Γ_2. На рис. 41 слева представлен граф $\widetilde{G}$, справа – $G - \widetilde{G}$.

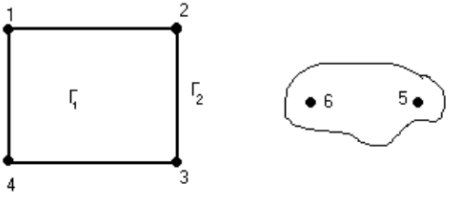


Рис. 41. Графы $\widetilde{G}$ и $G - \widetilde{G}$

Сегменты G относительно $\widetilde{G}$ приведены на рис. 42.

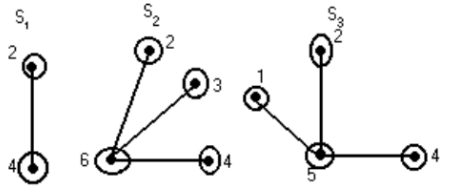


Рис. 42. Сегменты G относительно $\widetilde{G}$

Перечислим допустимые грани для каждого сегмента:

$$\Gamma(S_1) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$
$$\Gamma(S_2) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$
$$\Gamma(S_3) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Выберем произвольную α-цепь для грани Γ_1 (рис. 43).

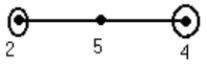
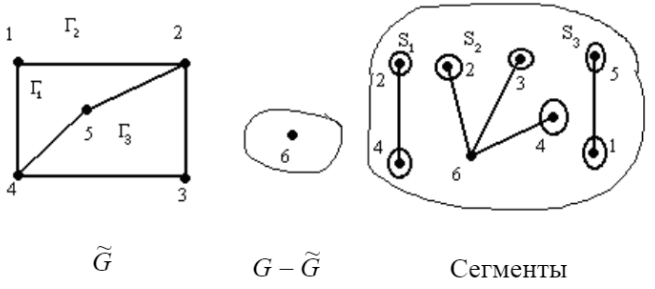


Рис. 43. Выбранная α-цепь

Второй этап укладки графа представлен на рис. 44.



$\widetilde{G}$ $G - \widetilde{G}$ Сегменты

Рис. 44. Второй этап укладки графа

Перечислим допустимые грани для каждого сегмента:

$$\Gamma(S_1) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$
$$\Gamma(S_2) = \Gamma_1 \cup \Gamma_3,$$
$$\Gamma(S_3) = \Gamma_1 - \text{единственная дополненная грань}.$$

Выберем α-цепь для грани Γ_1 (рис. 45).

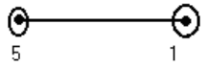
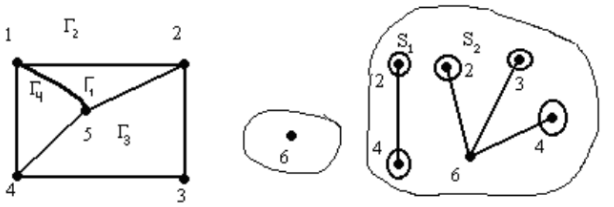


Рис. 45. α-цепь для грани Γ_1

Третий этап укладки графа представлен на рис. 46.



$\widetilde{G}$ $G - \widetilde{G}$ Сегменты

Рис. 46. Третий этап укладки графа

Допустимыми гранями для каждого сегмента являются:

$$\Gamma(S_1) = \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$
$$\Gamma(S_2) = \Gamma_3 \cup \Gamma_2.$$

Выберем произвольную α-цепь для грани Γ_3 (рис. 47).

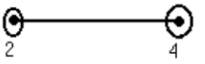
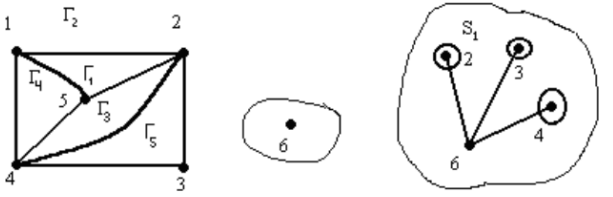


Рис. 47. Выбранная α-цепь

Четвертый этап укладки графа представлен на рис. 48.



$\widetilde{G}$ $G - \widetilde{G}$ Сегмент

Рис. 48. Четвертый этап укладки графа

Для сегмента S_1 допустимыми гранями являются: $\Gamma(S_1) = \Gamma_5 \cup \Gamma_2$.

Выберем произвольную α-цепь для грани Γ_2 (рис. 49).

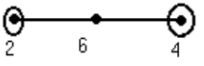
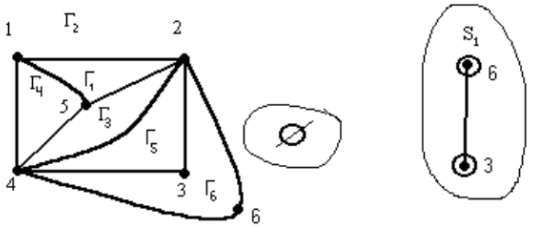


Рис. 49. Выбранная α-цепь

Пятый этап укладки графа представлен на рис. 50.



$\widetilde{G}$ $G - \widetilde{G}$ Сегмент

Рис. 50. Пятый этап укладки графа

Для сегмента S_1 допустимой гранью является грань Γ_6: $\Gamma(S_1) = \Gamma_6$. Для грани Γ_6 α-цепь совпадает с сегментом S_1 (рис. 51).

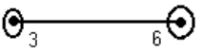


Рис. 51. α-цепь

Шестой этап укладки графа представлен на рис. 52.

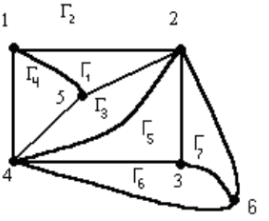


Рис. 52. Шестой этап укладки графа

Множество сегментов пусто. Построена укладка $\widetilde{G}$ графа G на плоскости. Конец алгоритма.

4. Алгоритмы на графах

4.1. Обходы графов

Обход графа – это некоторое перечисление его вершин (и/или ребер). Среди всех обходов наиболее известны поиск в глубину и в ширину. Алгоритмы поиска в глубину и в ширину лежат в основе многих алгоритмов на графах.

4.1.1. Поиск в глубину

Пусть граф G задан списками смежности, т.е. $\forall v \in V_G$ задан список N_v вершин, инцидентных вершине v, и пусть задана исходная вершина V_0, с которой начинается поиск.

Результат работы алгоритма поиска в глубину (ПГ) – 2 списка: $ПГ$, F, где $ПГ(v)$ – номер вершины v, $F(v)$ – имя вершины, из которой вершина v получила свой номер. В процессе работы алгоритма используется стек Q.

Алгоритм поиска в глубину в неориентированном связном графе

1) $ПГ(v_0) := 1$; $Q(1) := v_0$; $F(v_0) := 0$;

$k := 1$; // k – последний присваиваемый $ПГ$ – номер;

$p := 1$; // p – указатель конца стека Q, т.е. $Q(p)$ – имя последней вершины стека Q.

2) $v := Q(p)$; // v – исследуемая вершина.

3) В списке N_v найти новую ещё не просмотренную вершину w и перейти к п. 4. Если все вершины в списке N_v уже просмотрены, то перейти к п. 5.

4) $k := k + 1$; $ПГ(w) := k$; $F(w) := v$; $p := p + 1$; $Q(p) := w$; вершина w получила $ПГ$-номер и занесена в стек Q.

5) $p := p - 1$; // вершина v вычеркнута из Q. Если $p = 0$, то конец. Иначе перейти к п. 2.

4.1.2. Поиск в ширину

Заметим, что при поиске в глубину чем позднее была посещена вершина, тем раньше она будет использована (стек). При поиске в ширину (ПШ) чем раньше посещается вершина, тем раньше оно используется (очередь).

Пусть G задан списками смежности и пусть задана исходная вершина v_0, с какой начинается поиск. В процессе работы алгоритма используется очередь Q. Вначале в Q имеется единственная вершина v_0.

Алгоритм поиска в ширину в неориентированном связном графе

1) $Q(1) := v_0$; $ПШ(v_0) := 1$; $F(v_0) := 0$;

   $p := 1$; // адрес первой занятой ячейки списка Q;

   $q := 1$; // адрес последней занятой ячейки списка Q;

   $k := 1$; // последний присвоенный $ПШ$ – номер.

2) $v := Q(p)$; // выбрана первая вершина очереди Q;

   $m := | N_V |$; // количество вершин, смежных с v.

3) $l := 1$.

4) Если вершина $w = N_V(l)$ уже просмотрена, то перейти к п. 5. Иначе $k := k + 1$; $ПШ(w) := k$; $F(w) := v$; $q := q + 1$; $Q(q) := w$; // вершина w помечена и включена в Q и перейти к п. 5.

5) Если $l = m$, то перейти к п. 6, иначе $l := l + 1$ и следовать к п. 4.

6) $p := p + 1$; // вершина v исключена из Q.

7) Если $p > q$, то конец // $Q = \varnothing$, т.е. все вершины помечены. Иначе следовать к п. 2.

4.1.3. Нахождение деревьев и остовов с помощью поиска в глубину и ширину

Пусть G – связный неориентированный граф. Пусть $D(V, A)$ – его дерево покрытия. Рёбра этого дерева будем называть ветвями, а все остальные рёбра графа – хордами.

Процедуры $ПГ$ и $ПШ$ можно простым способом использовать для нахождения деревьев покрытия. В обоих случаях достижение вершины u из вершины v вызывает включение в дерево дуги (v, u).

Нахождение дерева покрытия с помощью ПГ

Результат работы алгоритма – дерево покрытия (ориентированное). Пусть V_0 – вершина, с которой начинается поиск.

1) $Q(1) = V_0$; $A := \varnothing$; // множество найденных ветвей;

   $P := 1$. // указатель конца стека

2) $V := Q(p)$.

3) В списке N_V найти новую, ещё не просмотренную вершину W и перейти к п. 4. Если таких вершин нет, то следовать к п. 5.

4) $A := A \cup (V,W)$; $p := +p+1$; $Q(p) := W$. Перейти к п. 2.

5) $p := p-1$. Если $p = 0$, то конец. Иначе следовать к п. 2.

Пример. На рис. 53 приведено дерево покрытия, найденное с помощью $ПГ$.

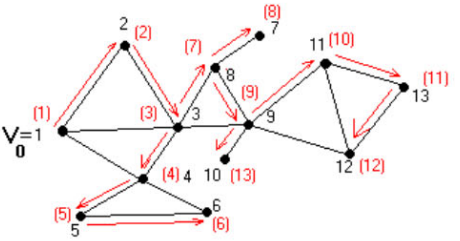


Рис. 53. Дерево покрытия, найденное с помощью $ПГ$

Вершину V_0, с которой начинается поиск в графе, называют корнем дерева покрытия $D(V,A)$.

Нахождение дерева покрытия с помощью ПШ

Результат работы алгоритма – дерево покрытия (ориентированное) $D(V,A)$. Пусть V_0 – вершина, с которой начинается поиск.

1) $Q(1) := V_0$; $A := \varnothing$; $P := 1$; // адрес 1-й ячейки Q;

$q := 1$; // адрес последней ячейки Q.

2) $V := Q(p)$; $m := |N_V|$.

3) $l := 1$.

4) Если вершина $W = N_V(l)$ уже просмотрена, то $\rightarrow$ п. 5. Иначе $q := q+1$; $A := A \cup (V,W)$; $Q(q) := W$ $\rightarrow$ п. 5.

5) Если $l = m$, то $\rightarrow$ п. 6, иначе $l := l+1$ и $\rightarrow$ п. 4.

6) $p := p+1$.

7) Если $p > q$, то конец, иначе $\rightarrow$ п. 2.

Пример. На рис. 54 показано дерево покрытия, найденное с помощью *ПШ* .

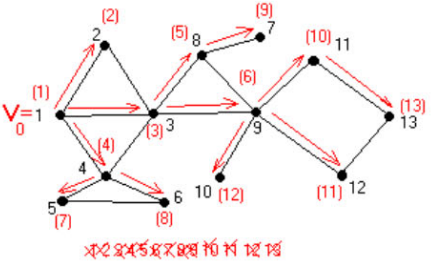


Рис. 54. Дерево покрытия, найденное с помощью *ПШ*

Чтобы найти остов несвязного графа, нужно для каждой компоненты связности построить дерево покрытия.

4.2. Остов минимального веса (кратчайший остов)

Граф (ориентированный или неориентированный), каждому ребру которого сопоставлено число, будем называть взвешенным. Число, сопоставленное ребру, будем называть весом или длиной ребра.

Остов минимального веса – остов, сумма весов рёбер которого минимальна по сравнению с другими остовами.

Замечание. Далее мы будем рассматривать взвешенные графы.

Рассмотрим следующую задачу: во взвешенном связном графе требуется найти остов минимального веса. Эта задача возникает при проектировании линий электропередачи, дорог и т.д., когда требуется заданные центры соединить некоторой системой каналов связи так, чтобы любые два центра были связаны либо непосредственно соединяющим их каналом, либо через другие центры и каналы. При этом общая стоимость (или длина) каналов должна быть минимальной.

Для решения задачи нахождения минимального остова имеются эффективные алгоритмы. Опишем некоторые из них – алгоритм Краскала и Прима, применимые к произвольному связному графу.

Задача об остове минимального веса. В связном взвешенном графе (G,W) порядка n найти остов минимального веса, где $W: E_G \to N$ – функция, ставящая в соответствие ребру e графа некоторый вес $W(e)$.

Алгоритм Краскала

1) Строим граф $T_1 = O_n + e_1$, присоединяя к пустому графу O_n ребро $e_1 \in E_G$ минимального веса.

2) Если граф T_i уже построен и $i < n-1$, то строим граф $T_{i+1} = T_i + e_{i+1}$, где e_{i+1} – ребро графа G, имеющее минимальный вес среди ребер, не входящих в T_i и не составляющих циклов с рёбрами из T_i.

Пример. На рис. 55 слева изображен исходный граф, справа – его остов, найденный по алгоритму Краскала.

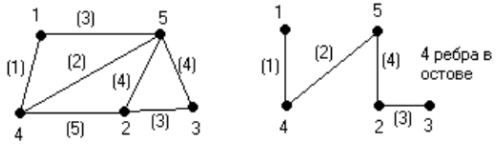


Рис. 55. Граф и его остов, найденный по алгоритму Краскала

Алгоритм Прима

1) Выбираем ребро $e_1 = \{a,b\}$ минимального веса и строим дерево T_1, полагая $V_{T1} = \{a,b\}$, $E_{T1} = \{e_1\}$.

2) Если дерево T_i порядка $i+1$ уже построено и $i < n-1$, то среди рёбер, соединяющих вершины этого дерева с вершинами графа G, не входящими в T_i, выбираем ребро l_{i+1} минимального веса. Строим дерево T_{i+1}, присоединяя к T_i ребро l_{i+1} вместе с его не входящими в T_i концами.

Пример. На рис. 56 слева изображен исходный граф, справа – пошаговое выполнение алгоритма Прима и остов, найденный на 4-м шаге.

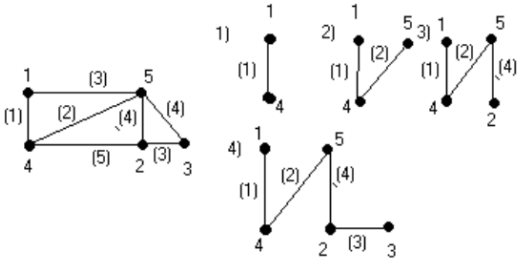


Рис. 56. Граф и его остов, найденный по алгоритму Прима

В некоторых ситуациях требуется построить остов не минимального, а максимального веса. К этой задаче также применимы оба алгоритма. Следует только всюду минимальный вес заменять на максимальный.

4.3. Кратчайшие пути

Пусть $G = (V, A)$ – ориентированный взвешенный граф.

Задача о кратчайшем пути состоит в отыскании пути минимального веса, соединяющего начальную и конечную вершины графа G при условии, что хотя бы один такой путь существует. Начальную и конечную вершины обозначим соответственно через s и t; (s,t)-путь минимального веса будем называть кратчайшим (s,t)-путём.

4.3.1. Алгоритм Дейкстры

Сначала рассмотрим случай, когда веса всех дуг неотрицательны, т.е. $W(e) \geq 0$ для каждой дуги $e \in A$. В этом случае решение задачи о кратчайшем пути является менее трудоёмким, чем в общем случае.

Первый эффективный алгоритм построения кратчайшего пути в графе с неотрицательными весами дуг предложил Дейкстра в 1959 г.

На каждой итерации этого алгоритма всякая вершина v графа G имеет метку $l(v)$, которая может быть постоянной или временной. В первом случае $l(v)$ – вес кратчайшего (s,v)-пути. Если же метка $l(v)$ временная, то $l(v)$ – вес

кратчайшего (s,v)-пути, проходящего только через вершины с постоянными метками. Таким ооразом, временная метка $l(v)$ является оценкой сверху для веса кратчайшего (s,v)-пути, причем, став на некоторой итерации постоянной, она остается такой до конца работы алгоритма.

Кроме $l(v)$, с каждой вершиной v графа G, за исключением S, связывается ещё одна метка $\theta(v)$. На каждой итерации $\theta(v)$ является номером вершины, предшествующей v в (s,v)-пути, имеющем минимальный вес среди всех (s,v)-путей, проходящих через вершины, получившие к этому моменту постоянные метки. После того как вершина t получила постоянную метку, с помощью меток $\theta(v)$ легко указать последовательность вершин, составляющих кратчайший (s,v)-путь.

Перед началом первой итерации алгоритма вершина S имеет постоянную метку $l(S)=0$, а временные метки всех остальных вершин равны ∞.

Будем считать, что граф G задан матрицей весов либо списками смежности.

Алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути

1) Положим $l:=0$ и будем считать эту метку постоянной. Положим $l(v):=\infty \ \ \forall v\in V_G$, $v\neq S$, считаем эти метки временными. Положим $p:=S$.

2) Для любых выходящих из p вершин v с временными метками выполнить: если $l(v)>l(p)+W(p,v)$ и $\theta(v):=p$. Иначе $l(v)$ и $\theta(v)$ не менять местами.

3) Пусть V' – множество вершин с временными метками l. Найти такую вершину V^*, что $l(v^*)=\min\limits_{v\in V'} l(v')$. Считать метку $l(v^*)$ постоянной меткой вершины v^*.

4) $p:=v^*$. Если $p=t$, то следовать к п. 5, где $l(t)$ – вес кратчайшего пути. Иначе перейти к п. 2.

5) $p^*:=(S,...,\Theta^3(t),\Theta^2(t),\Theta(t),t)$, где p^* – кратчайший путь. Конец.

Замечания: 1) Алгоритм Дейкстры применим и к неориентированным графам. Для этого достаточно каждое неориентированное ребро $\{u,v\}$ графа, имеющее вес $W(u,v)$, рассматривать как пару дуг (u,v) и (v,u) того же веса.

2) Если п. 4. модифицировать так, чтобы алгоритм заканчивал работу только после получения всеми вершинами постоянных меток, то он будет строить кратчайшие пути из S в каждую из остальных вершин. Если к тому же вместе с превращением метки вершины v^* в постоянную (п. 3 алгоритма) заносить дугу $(\Theta(v^*),v^*)$ в множество A^*, то после окончания работы алгоритма граф $D(V_G,A^*)$ будет корневым ориентированным остовным деревом. Это дерево называют деревом кратчайших путей из S графа G. Для любой вершины $v\in V_G$ единственный (s,v)-путь в дереве D является кратчайшим в графе G.

3) Кратчайший (s,v)-путь по алгоритму Дейкстры строится в графе G за время $O(n^2)$.

Пример. Пусть граф задан матрицей весов:

	1	2	3	4	5	6
1	0	6	2	∞	∞	∞
2	∞	0	∞	1	∞	∞
3	∞	3	0	1	5	∞
4	∞	∞	∞	0	3	4
5	∞	∞	∞	∞	0	5
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

Деревья кратчайших путей из вершин 1, 2, 3, найденные по алгоритму Дейкстры, представлены соответственно на рис. 57–59.

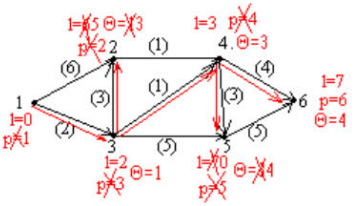


Рис. 57. Дерево кратчайших путей из вершины 1 по алгоритму Дейкстры

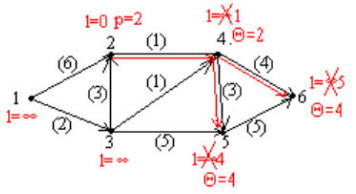


Рис. 58. Дерево кратчайших путей из вершины 2 по алгоритму Дейкстры

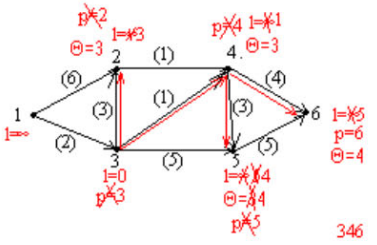


Рис. 59. Дерево кратчайших путей из вершины 3 по алгоритму Дейкстры

4.3.2. Алгоритм Флойда

Рассмотрим более общую ситуацию. Будем считать, что в графе G допускаются дуги отрицательного веса. Опишем алгоритм нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин графа при условии, что в графе нет отрицательных контуров (замкнутых путей отрицательного веса). Если же такой контур в графе есть, то алгоритм сообщает об этом и прекращает работу.

Будем считать, что граф G задан матрицей весов дуг W:

$$W_{ij} = \begin{cases} w(i,j), \text{ если } (i,j) \in E_G, i \neq j; \\ 0, \text{ если } i = j; \\ \infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

В алгоритме используются матрицы $W^0,...,W^n$ и $P^0,...,P^n$. Матрица W^k $(k = 1,...,n)$ содержит веса кратчайших путей, проходящих только через вершины $1, 2,..., k$.

Элемент P_{ij}^k матрицы P^k соответствует номеру вершины, предшествующий вершине j в текущем (i,j)-пути. Таким образом, матрица P^k имеет тот же смысл, что и метка θ в алгоритме Дейкстры.

Алгоритм Флойда

1) $W^0 = W$; $k = 1$; $P^0 = [P_{ij}^0]$, где

$$P_{ij}^0 = \begin{cases} i, \text{ если } W_{ij} \neq \infty; \\ 0, \text{ если } W_{ij} = \infty. \end{cases}$$

2) $\forall i, j = 1,..., n$ выполнить: если $W_{ij}^{k-1} < W_{ik}^{k-1} + W_{kj}^{k-1}$, то $W_{ij}^k = W_{ij}^{k-1}$; $P_{ij}^k = P_{ij}^{k-1}$. Иначе $W_{ij}^k < W_{ik}^{k-1} + W_{kj}^{k-1}$; $P_{ij}^k = P_{kj}^{k-1}$.

3) Если для некоторого $l = 1,..., n$ выполняется неравенство $W_{ll}^k < 0$, то конец (в графе имеется отрицательный контур). Иначе перейти к п. 4.

4) $k = k + 1$. Если $k = n + 1$, то конец, причем W^n – матрица весов кратчайших путей, определяемых с помощью матрицы P^n. С помощью матрицы P^n кратчайший (i, j)-путь $P(i, j)$ определяется следующим образом: $P(i, j) = (i,..., j_3, j_2, j_1, j)$, $j_1 = P_{ij}^n$, $j_2 = P_{ij_1}^n$,.... Иначе перейти к п. 2.

Пример. Рассмотрим граф с дугами отрицательного веса на рис. 60.

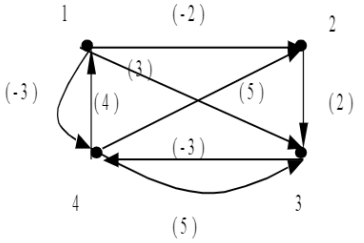


Рис. 60. Граф с дугами отрицательного веса

По алгоритму Флойда получим следующие матрицы:

$$W^0 = W = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & -3 \\ \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix};$$

$$W^1=\begin{bmatrix}0 & -2 & 3 & -3\\ \infty & 0 & 2 & \infty\\ \infty & \infty & 0 & -3\\ 4 & 2 & 5 & 0\end{bmatrix},\quad P^1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 4 & 4\end{bmatrix};$$

$$W^2=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0 & -3\\ \infty & 0 & 2 & \infty\\ \infty & \infty & 0 & -3\\ 4 & 2 & 4 & 0\end{bmatrix},\quad P^2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix};$$

$$W^3=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0 & -3\\ \infty & 0 & 2 & -1\\ \infty & \infty & 0 & -3\\ 4 & 2 & 4 & 0\end{bmatrix},\quad P^3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix};$$

$$W^4=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0 & -3\\ 3 & 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0 & -3\\ 4 & 2 & 4 & 0\end{bmatrix},\quad P^4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Найдем с помощью полученной матрицы P^4 кратчайший (2, 1)-путь: $P(2,1)=(P^4_{23}=2, P^4_{24}=3, P^4_{21}=4, 1)=(2,3,4,1)$. Длина этого пути $W^3_{21}=3$.

Пример. Рассмотрим граф с дугами отрицательного веса на рис. 61.

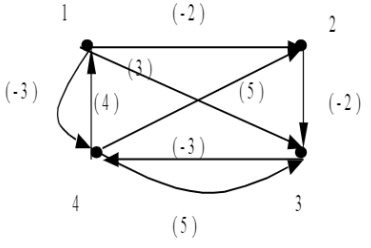


Рис. 61. Граф с дугами отрицательного веса

По алгоритму Флойда получим следующие матрицы:

$$W^0 = W = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & -3 \\ \infty & 0 & -2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix};$$

$$W^1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & -3 \\ \infty & 0 & -2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix};$$

$$W^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -3 \\ \infty & 0 & -2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$W^3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -7 \\ \infty & 0 & -2 & -5 \\ \infty & \infty & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$W^4 = \begin{bmatrix} -3 & & & -3 \\ & & & -1 \\ & & & -3 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^4 = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}.$$

В графе есть контур отрицательного веса (1, 2, 3, 4), $W_{14}^4 = -3$.

5. Транспортные сети

Транспортной сетью называется орграф $D = (V, A)$ с множеством вершин $V = \{v_1, ..., v_n\}$, для которого выполняется условие:

1) существует одна и только одна называемая источником вершина v_1, в которую не заходит ни одна дуга;

2) существует одна и только одна называемая стоком вершина v_n, из которой не исходит ни одной дуги;

3) каждой дуге $a \in A$ поставлено в соответствие целое число $w(a) \geq 0$, называемое пропускной способностью дуги.

Вершины в транспортной сети, отличные от источника и стока, называются промежуточными.

Пример. В транспортной сети на рис. 62 v_1 – источник; v_4 – сток; v_2, v_3 – промежуточные вершины.

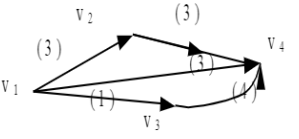


Рис. 62. Пример транспортной сети

5.1. Поток в транспортной сети

Функция φ $(\varphi : A \to N_0)$, определенная на множестве A дуг транспортной сети D и принимающая целочисленные значения, называется допустимым потоком (или потоком) в транспортной сети D, если:

1) для любой дуги $a \in A$ величина $\varphi(a)$, называемая потоком по дуге a, удовлетворяет условию $0 \leq \varphi(a) \leq w(a)$;

2) для любой промежуточной вершины v выполняется равенство

$$\forall v \in V \setminus \{v_1, v_n\} \sum_{u:(u,v)\in A} \varphi(u,v) - \sum_{u:(v,u)\in A} \varphi(v,u) = 0,$$

т.е. сумма потоков по дугам, заходящим в v, равна сумме потоков по дугам, выходящим из v.

Теорема 13. Для любого допустимого потока φ в транспортной сети D выполняется равенство

$$\sum_{v:(v1,v)\in A} \varphi(v_1,v) = \sum_{v:(v,vn)\in A} \varphi(v,v_n).$$

Доказательство: По определению допустимого потока φ имеем

$$\sum_{v\in V\setminus\{v_1,v_n\}} \Big(\sum_{u:(u,v)\in A} \varphi(u,v) - \sum_{u:(v,u)\in A} \varphi(v,u) \Big) = 0.$$

Заметим, что для любой дуги $a = (v_1, v) \in A$, где $v \neq v_n$, величина $\varphi(a)$ входит в левую часть равенства только один раз и со знаком «+». Аналогично для любой дуги $a = (v, v_n) \in A$, где $v \neq v_1$, величина $\varphi(a)$ входит в левую часть уравнения один раз и со знаком «–».

С другой стороны, для любой дуги $a = (u_1, u_2) \in A$, $u_1, u_2 \in V \setminus \{v_1, v_n\}$, величина $\varphi(a)$ входит в левую часть равенства со знаком «+» и один раз со знаком «–», что в сумме дает нулевой вклад в левую часть равенства. Отсюда следует утверждение теоремы. $\triangleleft$

Величиной допустимого потока $\overline{\varphi}$ в транспортной сети D называется величина, равная сумме потоков по всем дугам, заходящим в v_n, или величина, равная сумме потоков по всем дугам, выходящим из v_1:

$$\overline{\varphi} = \sum_{v:(v1,v)\in A} \varphi(v_1, v) = \sum_{v:(v,vn)\in A} \varphi(v, v_n).$$

Пусть φ – допустимый поток в транспортной сети D. Дуга $a \in A$ называется насыщенной, если поток по ней равен её пропускной способности, т.е. $\varphi(a) = w(a)$.

Допустимый поток φ называется полным, если любой путь из v_1 в v_n содержит хотя бы одну насыщенную дугу.

Допустимый поток φ называется максимальным, если его величина $\overline{\varphi}$ принимает максимальное значение по сравнению с другими допустимыми потоками в транспортной сети.

Очевидно, что максимальный поток φ обязательно является полным, так как в противном случае в D существует некоторая простая цепь из v_1 в v_n, не содержащая насыщенных дуг. Следовательно, можно увеличить на единицу потоки по всем дугам этой цепи и тем самым увеличить $\overline{\varphi}$ на единицу, что противоречит условию максимальности потока.

5.2. Нахождение полного потока

Опишем алгоритм построения полного потока в сети.

Алгоритм построения полного потока в сети

1) $\forall a \in A \;\; \varphi(a) = 0$.

2) Ищем в D простую цепь λ из v_1 в v_n, содержащую ненасыщенные дуги. Если такой цепи нет, то φ – искомый полный поток в транспортной сети D. Конец алгоритма. Иначе переходим к п. 3.

3) Увеличиваем поток $\varphi(a)$ по каждой дуге a из λ на такую одинаковую величину $x > 0$, что хотя бы одна из дуг цепи окажется насыщенной, а потоки по остальным дугам из λ не превысят их пропускных способностей.

При этом величина потока $\overline{\varphi}$ также увеличивается на x, а сам поток φ в транспортной сети D остается допустимым. Переходим к п. 2.

Пример. Рассмотрим транспортную сеть на рис. 63 и найдем полный поток по приведенному выше алгоритму.

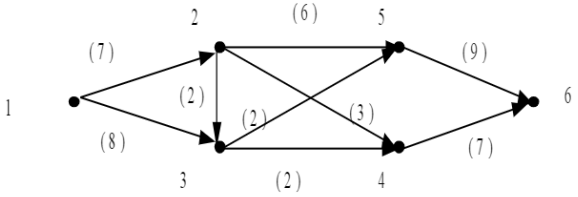


Рис. 63. Транспортная сеть

Перечислим шаги алгоритма: $v_1v_2v_4v_6$ +3; $v_1v_3v_5v_6$ +2; $v_1v_3v_4v_6$ +2; $v_1v_2v_5v_6$ +4.

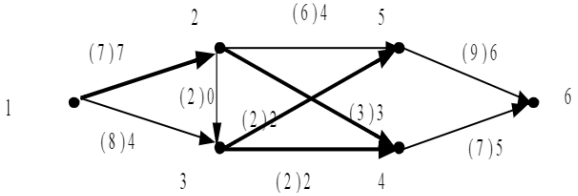


Рис. 64. Полный поток

Получим полный поток, показанный на рис. 64, с четырьмя насыщенными дугами (выделены жирным шрифтом). Величина этого потока $\overline{\varphi} = 11$.

5.3. Нахождение максимального потока

Пусть $\overline{v} = (v_1, v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_n)$ – цепь, соединяющая v_1 с v_n, причем в этой цепи могут присутствовать разнонаправленные дуги (рис. 65).

Рис. 65. Разнонаправленные дуги

Если ориентация дуги совпадает с направлением прохождения цепи, то будем обозначать ее через $\vec{a}$, в противном случае – через $\overleftarrow{a}$.

Положим:

$$\delta(\vec{a}) = w(\vec{a}) - \varphi(\vec{a}); \quad (1)$$

$$\varphi^* = \min_{\vec{a}} \varphi(\vec{a}); \quad (2)$$

$$\delta^* = \min_{\vec{a}} \delta(\vec{a}); \quad (3)$$

$$\varepsilon^* = \min(\varphi^*, \delta^*). \quad (4)$$

Алгоритм Форда-Фалкерсона нахождения максимального потока в транспортной сети

1) Находим любой допустимый поток φ (можно пустой).

2) Помечаем v_0 символом [+].

3) Если v_i – помеченная вершина, то помечаем символом:

$[+v_i]$ – все непомеченные вершины v, для которых дуги (v_i, v) ненасыщенные;

$[-v_i]$ – все непомеченные вершины v, для которых дуги (v, v_i) такие, что $\varphi(v, v_i) > 0$.

4) Если таким способом нам удается пометить сток v_n, то это означает, что существует цепь, идущая от v_0 к v_n, все вершины которой помечены. Вычисляя ε^* по формулам (1) – (4) и полагая для дуг этой цепи:

$$\varphi'(\vec{a}) = \varphi(\vec{a}) + \varepsilon^*;$$

$$\varphi'(\bar{a}) = \varphi(\bar{a}) - \varepsilon^*,$$

мы увеличиваем поток φ на ε^*. После этого переходим к п. 2. Если нам не удается пометить сток v_n, то мы нашли максимальный поток в сети. Конец.

Пример. Рассмотрим транспортную сеть на рис. 66. Найдем в ней максимальный поток.

Для этого сначала найдем полный поток: $x_0x_1x_2x_3$ +1; $x_0x_2x_1x_3$ +1. Полный поток $\bar{\varphi} = 2$ (рис. 67).

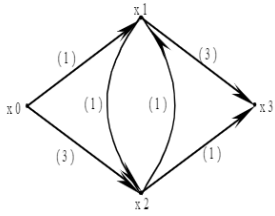


Рис. 66. Транспортная сеть

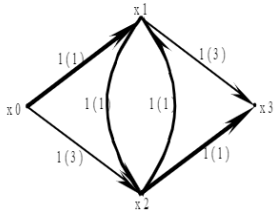


Рис. 67. Полный поток

Найдем максимальный поток. Этапы алгоритма изображены на рис. 68-69.

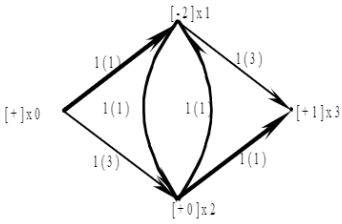


Рис. 68. Первый этап алгоритма Форда-Фалкерсона

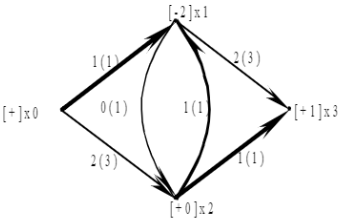


Рис. 69. Второй этап алгоритма Форда-Фалкерсона

На первом этапе выбираем цепь $x_0x_2x_1x_3$, при этом $\varepsilon^* = 1$. На втором этапе получаем максимальный поток $\overline{\varphi} = 3$.

6. Математическая логика

6.1. Алгебра высказываний

6.1.1. Логические операции. Таблица истинности

Под высказыванием принято понимать предложение, о котором имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.

Высказываниями являются, например, следующие предложения: «5 – простое число»; «Волга впадает в Чёрное море». Первое высказывание истинно, а второе – ложно.

Будем обозначать высказывание большими латинскими буквами A, B, C, …, а их значения, то есть истину и ложь, соответственно $И$ и $Л$.

Операции над высказываниями

Пусть даны 2 произвольных высказывания A и B.

1. Отрицанием высказывания A называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. Отрицание A обозначается $\overline{A}$ (или $\neg A, A'$) и читается «не А».

2. Конъюнкцией 2-х высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Конъюнкция высказываний A и B обозначается $A \wedge B$ (или $A \& B$) и читается как «А и В».

3. Дизъюнкцией 2-х высказываний A и B называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны. Дизъюнкция высказываний A и B обозначается через $A \vee B$ и читается «А или В».

4. Импликацией 2-х высказываний A и B называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда A истинно, а B – ложно. Импликация высказываний A и B обозначается через $A \to B$ (или $A \supset B$, $A \Rightarrow B$) и читается «А влечёт В» (или «если А, то В», «из А следует В»).

Высказывание A называется посылкой импликации, а высказывание B – заключением импликации.

5. Эквивалентностью 2-х высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения A и B совпадают. Эквивалентность высказываний A и B обозначается через $A \sim B$ и читается «А эквивалентно В».

6. Суммой по модулю 2 (исключающим или) 2-х высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда значения A и B различны. Сумма по модулю 2 обозначаются $A \oplus B$ (или $A \triangleright B$).

Пусть X, Y, Z, … – произвольные высказывания. При помощи операций $\wedge, \vee, \neg, \to, \oplus, \sim$ мы можем образовать из них сложные высказывания: $X \wedge Y, X \vee Y, X \to Y$ и так далее. Из полученных высказываний, применяя те же операции, можно получить новые сложные высказывания. Например: $X \to (Y \vee Z)$; $\overline{(X \sim Y)}$; $(\overline{(X \vee Y)} \wedge (Z \to \overline{(Y \to Z \sim X)}))$ и так далее.

Зная значения, которые принимают высказывания X, Y, Z, …, мы легко можем установить значение составленного из них сложного высказывания.

Пример. Пусть $X = И$, $Y = Л$, $Z = Л$. Тогда сложное высказывание $X \to (Y \vee Z)$ может быть записано в виде: $И \to (Л \vee Л) = И \to Л = Л$. Значение этого сложного высказывания есть $Л$.

Всякое сложное высказывание, составленное из некоторых исходных высказываний посредством применения операций 1-6, мы будем называть формулой алгебры высказываний.

Если мы зададим значения всех переменных элементарных высказываний, то сама формула примет определённое значение.

Так как аргументы и формулы способны принимать только 2 различных значения, то такая функция может быть полностью описана конечной таблицей истинности. В таблице истинности перечислены все значения переменных функции и значения самой функции на этих переменных.

Пример. Приведём таблицы истинности для следующих формул:

$\overline{X}, X \wedge Y, X \vee Y, X \to Y, X \sim Y, X \oplus Y$ (табл. 1-2).

Таблица 1

Таблица истинности отрицания

X	$И$	$Л$
$\overline{X}$	$Л$	$И$

Таблица 2

Таблица истинности операций с 2-мя переменными

X	$И$	$И$	$Л$	$Л$
Y	$И$	$Л$	$И$	$Л$
$X \wedge Y$	$И$	$Л$	$Л$	$Л$
$X \vee Y$	$И$	$И$	$И$	$Л$
$X \to Y$	$И$	$Л$	$И$	$И$
$X \sim Y$	$И$	$Л$	$Л$	$И$
$X \oplus Y$	$Л$	$И$	$И$	$Л$

6.1.2. Равносильность формул

Будем называть 2 формулы A и B равносильными, если при любых значениях $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – совокупность всех переменных, входящих в A и B, эти формулы принимают одинаковые значения. Равносильность формул будем обозначать значком $\equiv$ (например $A \equiv B$).

Между понятием равносильности и знаком эквивалентности существует следующая связь: если формулы A и B равносильны, то формула $A \sim B$

принимает значение $И$ при всех значениях переменных. И обратно: если формула $A \sim B$ принимает значение $И$ при всех значениях переменных, то формулы A и B равносильны.

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из определения эквивалентности.

Основные равносильности формул

Для любых формул A, B, C справедливы следующие равносильности:

1. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (коммутативность $\wedge$);
2. $A \vee B \equiv B \vee A$ (коммутативность $\vee$);
3. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ (ассоциативность $\wedge$);
4. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (ассоциативность $\vee$);
5. $A \wedge A \equiv A$ (идемпотентность $\wedge$);
6. $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность $\vee$);
7. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (дистрибутивность $\vee$ относительно $\wedge$);
8. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (дистрибутивность $\wedge$ относительно $\vee$);
9. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ (первый закон поглощения);
10. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ (второй закон поглощения);
11. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ (снятие двойного отрицания);
12. $\overline{(A \wedge B)} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ (первый закон де Моргана);
13. $\overline{(A \vee B)} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ (второй закон де Моргана);
14. $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$ (первая формула расщепления);
15. $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$ (вторая формула расщепления);
16. $A \vee \overline{A} \equiv И$;
17. $A \wedge \overline{A} \equiv Л$;
18. $A \wedge И \equiv A$;
19. $A \vee Л \equiv A$;
20. $A \vee И \equiv И$;
21. $A \wedge Л \equiv Л$.

Соотношения 1-21 легко проверяется на основании определения операций $\wedge, \vee, \bar{}$ с помощью таблицы истинности.

Пример. Докажем равносильность 9 (табл. 3).

Таблица 3

Левая и правая части равносильности 9

A	*И*	*И*	*Л*	*Л*
B	*И*	*Л*	*И*	*Л*
$A \vee B$	*И*	*И*	*И*	*Л*
$A \wedge (A \vee B)$	*И*	*И*	*Л*	*Л*

Соотношения равносильности позволяют производить над формулами преобразования, приводящие их к более простому и удобному виду.

Пример. Упростим формулу $((X \vee X) \wedge Y) \vee (X \vee X)$, используя равносильности 6, 2, 10:

$$((X \vee X) \wedge Y) \vee (X \vee X) \equiv (X \wedge Y) \vee X \equiv X .$$

Можно ещё упростить запись формул, опуская скобки и считая, что приоритет операций следующий: $1 - \bar{}\,; 2 - \wedge; 3 - \vee, \oplus; 4 - \rightarrow, \sim$.

Логические операции $\bar{}, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, \oplus$ не являются независимыми друг от друга. Одни из них можно выразить через другие так, что при этом получаются равносильные формулы:

22. $A \sim B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$;

23. $A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B \equiv \overline{(A \wedge \bar{B})}$;

24. $A \vee B \equiv \bar{A} \rightarrow B \equiv \overline{(\bar{A} \wedge \bar{B})}$;

25. $A \wedge B \equiv \overline{(A \rightarrow \bar{B})} \equiv \overline{(\bar{A} \vee \bar{B})}$;

26. $A \oplus B \equiv (\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B})$.

Теорема 14. Для каждой формулы можно указать равносильную ей формулу, не содержащую логических символов $\rightarrow, \oplus, \sim$.

Доказательство: Опираясь на правило равносильных преобразований, можно в исходной формуле каждую подформулу вида $A \sim B$ заменить на $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$, а каждую подформулу вида $A \to B$ – на $\overline{A} \vee B$ (см. равносильности 22 и 23), $A \oplus B$ – на $(\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$. ◁

6.1.3. Закон двойственности

Пусть $X_1,...,X_n$ – все входящие в формулу A элементарные высказывания. Формула $A^*(X_1,...,X_n) \equiv \overline{A}(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n)$ называется двойственной формуле A. Очевидно, что A^{**} совпадает с A.

Конъюнкция двойственна дизъюнкции и наоборот, так как $A \equiv X \vee Y; A^*(X,Y) \equiv \overline{A}(\overline{X},\overline{Y}) \equiv \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} \equiv X \wedge Y$; $Л$ двойственна $И$ и наоборот: $A(X_1,...,X_n) \equiv Л; A^*(X_1,...,X_n) \equiv \overline{Л} \equiv И$.

Формула называется самодвойственной, если $A^* = A$.

Теорема 15. Если формулы $A \equiv B$, то $A^* \equiv B^*$.

Доказательство: Пусть $A(X_1,...,X_n) \equiv B(X_1,...,X_n)$, где $X_1,...,X_n$ – входящие в них элементарные высказывания. Тогда по определению: $A^*(X_1,...,X_n) \equiv \overline{A}(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n)$, а $B^*(X_1,...,X_n) \equiv \overline{B}(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n)$.

Из равносильности формул $A(X_1,...,X_n)$ и $B(X_1,...,X_n)$ следует равносильность формул $A(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n)$ и $B(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n)$, так как в силу определения равносильности $A(X_1,...,X_n)$ и $B(X_1,...,X_n)$ принимают одинаковые значения при любых значениях переменных $X_1,...,X_n$, а следовательно, и при $\overline{X}_1,...,\overline{X}_n$.

В силу сказанного справедливо тождество $A(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n) \equiv B(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n)$, следовательно, формулы $\overline{A}(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n)$ и $\overline{B}(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n)$ также равносильны. Отсюда следует утверждение теоремы. ◁

Теорема 15 называется законом двойственности.

6.1.4. Тождественно истинные формулы

Формула A называется тождественно истинной формулой (или тавтологией), если она при всех значениях входящих в неё переменных высказываний принимает значение $И$.

Пример. $X \vee \overline{X}, X \to (Y \to X).$

Формула A называется выполнимой, если она принимает значение $И$ при некоторых значениях входящих в неё переменных.

Пример. $X, X \vee \overline{Y}$.

Формула A называется тождественно ложной (или невыполнимой), если она при всех значениях входящих в неё переменных принимает значение $Л$.

Перечислим наиболее важные тавтологии. Пусть A, B, C – произвольные формулы.

1. $A \vee \overline{A}$ (закон исключающего третьего);
2. $A \to A$;
3. $A \to (B \to A)$;
4. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ (ценное рассуждение);
5. $(A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to (A \to C))$;
6. $(A \wedge B) \to A,\ (A \wedge B) \to B$;
7. $A \to (B \to (A \wedge B))$;
8. $A \to (A \vee B), B \to (A \vee B)$;
9. $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$;
10. $((A \to B) \to A) \to A$ (закон Пирса).

Каждую из этих тавтологий можно обосновать, например, составив таблицу истинности при произвольных значениях A, B, C.

6.1.5. Нормальные формы

Заметим, что в силу ассоциативности операций $\wedge$ и $\vee$, как бы мы не расставляли скобки в выражениях $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_k$ $(B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_k)$ $(k > 3)$, всегда будем приходить к равносильным формулам. Каждое из этих выражений

будем называть соответственно многочленной дизъюнкцией и конъюнкцией формул $B_1,...,B_k$.

Для этих формул нетрудно получить равносильности, выражающие обобщённую дистрибутивность:

1. $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_l) \equiv (A_1 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_2) \wedge ... \wedge$
$\wedge (A_1 \vee B_l) \wedge (A_2 \vee B_1) \wedge ... ... \wedge (A_2 \vee B_l) \wedge ... \wedge (A_k \vee B_l)$;
2. $(A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_k) \wedge (B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_l) \equiv (A_1 \wedge B_1) \vee (A_1 \wedge B_2) \vee ... \vee$
$\vee (A_1 \wedge B_l) \vee (A_2 \wedge B_1) \vee ... ... \vee (A_2 \wedge B_l) \vee ... \vee (A_k \wedge B_l)$,

а также обобщённые законы де Моргана:

3. $\overline{(A_1 \wedge ... \wedge A_k)} \equiv \overline{A}_1 \vee \overline{A}_2 \vee ... \vee \overline{A}_k$;
4. $\overline{(A_1 \vee ... \vee A_k)} \equiv \overline{A}_1 \wedge \overline{A}_2 \wedge ... \wedge \overline{A}_k$.

Определим некоторые канонические виды формул.

Формулу называют элементарной конъюнкцией, если она является конъюнкцией, может быть одночленной, переменных и отрицаний переменных.

Пример. $X, \overline{Y}, \overline{X} \wedge Y, X \wedge Y \wedge Z, Y \wedge Z$ являются элементарными конъюнкциями.

Говорят, что формула находится в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), если она является дизъюнкцией, может быть одночленной, элементарных конъюнкций.

Пример. $X, \overline{X}, X \wedge Y \wedge Z, (X \wedge \overline{Y}) \vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z})$ находятся в ДНФ.

Рассмотрим теорему о приведении к ДНФ.

Теорема 16. Для любой формулы A можно найти такую формулу B, находящуюся в ДНФ, что $A = B$. Формула B называется дизъюнктивной нормальной формой формулы A.

Доказательство: Доказательство теоремы распадается на три этапа.

1. Для формулы A строим такую формулу A_1, что $A \equiv A_1$ и в A_1 не содержатся символы $\sim, \rightarrow, \oplus$ (см. равносильности 22, 23, 26).

2. Докажем теперь, что для формулы A_1 можно найти такую равносильную ей формулу A_2, что в A_2 отрицание находится только над переменными. Такая формула называется формулой с «тесными» отрицаниями.

Докажем это утверждение индукцией по числу n логических символов, т.е. операций, формулы A_1. Если $n = 0$, то A_1 есть какая-то переменная X_i. В качестве A_2 нужно взять X_i.

Пусть утверждение выполняется для всех формул A_1 с числом символов меньше n. Пусть в формуле A_1 содержится n логических символов. Рассмотрим следующие случаи:

а) A_1 имеет вид $B_1 \vee C_1$. Тогда в B_1, C_1 логических символов меньше n. Поэтому существуют такие формулы B_2, C_2, что $B_1 \equiv B_2, C_1 \equiv C_2$ и в B_2, C_2 отрицание встречается только над переменными. Ясно, что $B_2 \vee C_2 \equiv A_1$ и является формулой с «тесными» отрицаниями.

б) A_1 имеет вид $B_1 \wedge C_1$. Доказательство аналогично предыдущему случаю.

в) A_1 имеет вид $\overline{\overline{B_1}}$. Тогда $A_1 \equiv B_1$ и в B_1 логических символов меньше n. Поэтому к B_1 применено индуктивное предположение.

г) A_1 имеет вид $\overline{B_1 \vee C_1}$. Тогда $A_1 \equiv \overline{B_1} \wedge \overline{C_1}$ и в B_1, C_1 логических символов меньше n. Поэтому существуют такие формулы B_2, C_2, что $B_2 \equiv \overline{B_1}, C_2 \equiv \overline{C_1}$ и в B_2, C_2 отрицание встречается только над переменными. Ясно, что $A_1 \equiv B_2 \wedge C_2$ и $B_2 \wedge C_2$ является формулой с «тесными» отрицаниями.

д) A_1 имеет вид $\overline{B_1 \wedge C_1}$. Тогда $A_1 \equiv \overline{B_1} \vee \overline{C_1}$ и далее поступаем, как и в предыдущем случае.

Пример. Преобразуем к формуле с «тесными» отрицаниями:

$$\overline{\overline{\overline{(X_1 \wedge \overline{X}_2)}} \vee (X_2 \wedge \overline{X}_1)} \equiv \overline{(X_1 \wedge \overline{X}_2) \vee (X_2 \wedge \overline{X}_1)} \equiv$$

$$\equiv \overline{(X_1 \wedge \overline{X}_2} \wedge \overline{(X_2 \wedge \overline{X}_1)} \equiv (\overline{X}_1 \vee X_2) \wedge (\overline{X}_2 \vee X_1).$$

3. Полученную формулу A_2 можно считать построенной из переменных и их отрицаний с помощью многочленных конъюнкций и дизъюнкций.

Применив теперь обобщённую дистрибутивность $\wedge$ относительно $\vee$, последовательно преобразуем формулу. Заметим, что при этом $\vee$ будет аналогична сложению, а $\wedge$ – умножению.

Полученная в результате преобразований формула B будет удовлетворять требованиям теоремы. $\triangleleft$

Пример. Применим преобразования 3-го этапа к формуле с «тесными» отрицаниями, полученной в предыдущем примере:

$$(\overline{X}_1 \vee X_2) \wedge (\overline{X}_2 \vee X_1) \equiv$$
$$\equiv (\overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2) \vee (\overline{X}_1 \wedge X_1) \vee (X_2 \wedge \overline{X}_2) \vee (X_2 \wedge X_1).$$

В результате мы получили формулу, находящуюся в ДНФ.

Говорят, что формула A находится в конъюнктивной нормальной форме (КНФ), если формула A^* определена (то есть в A нет символов $\sim, \to, \oplus$) и находится в ДНФ.

КНФ можно дать и другое равносильное определение.

Формулу называют элементарной дизъюнкцией, если она является дизъюнкцией, возможно, одночленной, переменных и отрицаний переменных.

Формула находится в КНФ, если она является конъюнкцией, возможно, одночленной, элементарных дизъюнкций. Рассмотрим теорему о приведении к КНФ.

Теорема 17. Для любой формулы A можно найти такую формулу B, что A находится в КНФ и $A \equiv B$. Формула B называется конъюнктивной нормальной формой A.

Доказательство: (***Первое***). Пусть $A \equiv A_1$ и A_1 не содержит символы $\sim, \to, \oplus$. Пусть B_1 – ДНФ для формулы A_1^*. Тогда B_1^* находится в КНФ (по определению) и, кроме того, по принципу двойственности:

$$B_1^* \equiv (A_1^*)^* \equiv A_1 \equiv A.$$

Значит B_1^* удовлетворяет требованиям теоремы.

(***Второе***). Применив первые два этапа из доказательства теоремы о ДНФ, получим формулу $A_2 \equiv A$, не содержащую символы $\sim, \to, \oplus$ и содержащую отрицания только над переменными.

Преобразуем теперь A_2 как алгебраическое выражение, считая на этот раз $\wedge$ аналогом сложения, а $\vee$ – аналогом умножения и применяя дистрибутивность $\vee$ относительно $\wedge$.

Приведение формулы A_2 к такому виду даёт КНФ. $\triangleleft$

Пример. Приведём к КНФ формулу:

$$(X_1 \wedge X_2) \sim (\overline{X}_1 \wedge X_3) \equiv ((X_1 \wedge X_2) \wedge (\overline{X}_1 \wedge X_3)) \vee (\overline{(X_1 \wedge X_2)} \wedge \overline{(\overline{X}_1 \wedge X_3)}) \equiv$$
$$\equiv (X_1 \wedge \overline{X}_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee ((\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X}_3)) \equiv (X_1 \vee \overline{X}_1 \vee X_2) \wedge$$
$$(\overline{X}_1 \vee \overline{X}_1 \vee X_2) \wedge (X_2 \vee \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2) \wedge (X_3 \vee \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2) \wedge (X_1 \vee X_1 \vee \overline{X}_3) \wedge$$
$$(\overline{X}_1 \vee X_1 \vee \overline{X}_3) \wedge (X_2 \vee X_1 \vee \overline{X}_3) \wedge (X_3 \vee X_1 \vee \overline{X}_3).$$

6.1.6. Совершенные нормальные формы

Нетрудно заметить, что ДНФ не является однозначно определяемой. Рассмотрим, например, формулу $X_1 \vee (X_2 \wedge X_3)$. Она находится в ДНФ. В то же время преобразование

$$X_1 \vee (X_2 \wedge X_3) \equiv (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3) \equiv$$
$$\equiv (X_1 \wedge X_1) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_1) \vee (X_2 \wedge X_3)$$

даёт для этой формулы другую ДНФ. Конечно, все ДНФ данной формулы равносильны. Выделим среди ДНФ так называемую совершенную дизъюнктивную нормальную формулу (СДНФ).

Пусть формула A зависит от n переменных. Говорят, что A находится в СДНФ относительно этих переменных, если выполняются следующие условия:

а) A находится в ДНФ;

б) в ней нет двух одинаковых дизъюнктивных членов;

в) каждый дизъюнктивный член формулы A является n-членной конъюнкцией, причем на i-м месте $(1 \le i \le n)$ этой конъюнкции обязательно стоит либо переменная X_i, либо её отрицание.

Замечание. Если расширить список переменных, от которых зависит формула A, новыми переменными, реально в A не входящими, то относительно нового списка будем иметь другую СДНФ.

Пример. Формулы, зависящие от трёх переменных и находящиеся в СДНФ:

$$X_1 \wedge \overline{X} \wedge \overline{X_3};$$
$$(X_1 \wedge \overline{X} \wedge \overline{X_3}) \vee (\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge X_3) \vee \left(X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}\right).$$

Теорема 18. Пусть формула A зависит от n переменных и не является тождественно ложной формулой. Тогда существует такая формула B, что $A \equiv B$ и B находится в СДНФ относительно этих переменных.

Доказательство: Согласно теореме о приведении к ДНФ существует такая формула A_1, что $A \equiv A_1$ и A_1 находится в ДНФ. Будем исходить из этой формулы и просматривать её элементарные конъюнкции.

1. Пусть в элементарную конъюнкцию одновременно входит какая-нибудь переменная X_i и её отрицание. Если это единственная элементарная конъюнкция, то она на всех значениях переменной X_i принимает значение *Л*, а следовательно, и вся формула, что невозможно, так как предполагается, что формула не является тождественно ложной.

Следовательно, имеются другие элементарные конъюнкции и формула после некоторых перестановок будет иметь вид $\left(X_i \wedge \overline{X_i} \wedge C\right) \vee D$, где C – остальные члены нашей элементарной конъюнкции, D – остальные дизъюнктивные члены всей формулы.

Но $\left(X_i \wedge \overline{X_i} \wedge C\right) \vee D \equiv D$, поскольку $X_i \wedge \overline{X_i} \wedge C \equiv Л$. Следовательно, рассматриваемую конъюнкцию можно отбросить.

Так как A не является тождественно ложной, то после всех таких шагов всегда останутся какие-то не отброшенные элементы конъюнкции.

2. Пусть в некоторой элементарной конъюнкции переменная X_i (или $\overline{X_i}$) встречается несколько раз. Тогда в силу идемпотентности (5) можно оставить только одно вхождение X_i (или $\overline{X_i}$).

3. После проведенной обработки каждая элементарная конъюнкция C будет содержать какую-нибудь переменную не более одного раза, включая её вхождение под знаком отрицания. При этом возможны только следующие варианты:

а) C содержит один раз X_i и ни разу $\overline{X_i}$;

б) C содержит один раз $\overline{X_i}$ и ни разу X_i;

в) C не содержит ни X_i, ни $\overline{X_i}$.

В последнем случае мы заменяем C на $(C \wedge X_i) \vee \left(C \wedge \overline{X_i}\right)$ согласно первой формуле расщепления (14).

Эту операцию следует проводить до тех пор, пока для каждой элементарной конъюнкции и каждой переменной не будут выполнены условия а или б.

4) Переупорядочим в каждой элементарной конъюнкции её члены таким образом, чтобы на первом месте в ней стояла X_i или $\overline{X_i}$.

5) Если в преобразованной формуле несколько раз встречается одна и та же элементарная конъюнкция, то, пользуясь равносильностью, т.е. идемпотентностью (6), выбрасываем все её вхождения, кроме одного.

Пример. Пусть формула $\left(X_1 \wedge \overline{X_1} \wedge X_3\right) \vee \left(X_1 \wedge \overline{X_3} \wedge X_1\right) \vee X_2$ зависит от переменных X_1, X_2, X_3. Приведём её к СДНФ.

$$\left(X_1 \wedge \overline{X_1} \wedge X_3\right) \vee \left(X_1 \wedge \overline{X_3} \wedge X_1\right) \vee X_2 \equiv (X_1 \wedge X_3) \vee X_2 \equiv$$
$$\equiv \left(X_1 \wedge \overline{X_3} \wedge X_2\right) \vee \left(X_1 \wedge \overline{X_3} \wedge \overline{X_2}\right) \vee X_2 \equiv$$
$$\equiv \left(X_1 \wedge \overline{X_3} \wedge X_2\right) \vee \left(X_1 \wedge \overline{X_3} \wedge \overline{X_2}\right) \vee (X_1 \wedge X_2) \vee \left(\overline{X_1} \wedge X_2\right) \equiv$$
$$\equiv (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee \left(X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge \overline{X_3}\right) \vee \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee \left(X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}\right) \vee$$
$$\left(\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}\right) \equiv \equiv \left(X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge \overline{X_3}\right) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee \left(X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}\right) \vee$$
$$\vee \left(\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge X_3\right) \vee \left(\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}\right).$$

Рассмотрим теорему о единственности СДНФ.

Теорема 19. Если B_1 и B_2 – СДНФ формулы A относительно переменных $X_1,...,X_n$, то B_1 и B_2 могут отличаться только порядком своих дизъюнктивных членов.

Аналогично определяется СКНФ. Пусть формула A зависит от n переменных. Тогда говорят, что A находится в СКНФ относительно этих переменных, если формула A^* находится в СДНФ относительно тех же переменных.

Дадим равносильное определение. Формула A находится в СКНФ, если выполнены условия:

а) A находится в КНФ;

б) в ней нет двух одинаковых конъюнктивных членов;

в) каждый член A является n-членной дизъюнкцией, причём на l-м $(1 \le l \le n)$ месте этой дизъюнкции обязательно стоит либо переменная X_l, либо $\overline{X_l}$.

Пример. Формулы, зависящие от трёх переменных X_1, X_2, X_3 и находящихся в СКНФ:

$$X_1 \vee \overline{X_2} \vee X_3;\ (X_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}).$$

Теорема 20. Пусть формула A зависит от n переменных и не является тождественно истинной. Тогда существует такая формула B, что $A \equiv B$ и B находится в СКНФ относительно этих переменных.

Рассмотрим теорему о единственности СКНФ.

Теорема 21. Если B_1 и B_2 – СКНФ формулы относительно переменных $X_1,...,X_n$, то B_1 и B_2 могут отличаться только порядком своих конъюнктивных членов.

Доказательство: Действительно, B_1^* и B_2^* в условиях теоремы будут СДНФ для A^* (по определению) и могут отличаться (по теореме о

единственности СДНФ) только порядком дизъюнктивных членов. Отсюда следует утверждение теоремы. ◁

СДНФ и СКНФ могут использоваться для распознавания равносильности 2-х формул.

Критерий равносильности: две формулы A_1 и A_2, зависящие от одних и тех же переменных $X_1,...,X_n$ и не равные тождественно *Л* или *И*, равносильны в том и только том случае, если они приводятся к СДНФ (СКНФ), отличающимся лишь порядком своих дизъюнктивных (конъюнктивных) членов.

6.2. Булевы функции

6.2.1. Представление булевой функции формулой логики высказываний

Булевой функцией $f(X_1,...,X_n)$ называется произвольная функция *f*, действующая из множества $\{0,1\}^n$ в множество $\{0,1\}$.

Как аргументы булевой функции, так и сама функция принимает значения из множества $\{0,1\}$.

Пусть значению *И* соответствует 1, а значению *Л* – 0. Тогда каждой формуле логике высказываний F можно поставить в соответствие булеву функцию *f*. При этом если формуле F_1 соответствует функция f_1, а формуле F_2 – функция f_2 и $F_1 = F_2$, то $f_1 = f_2$.

Всякую булеву функцию от *n* переменных можно записать таблицей из 2^n столбцов, в которой в каждом столбце записывают одно из значений списка переменных. Так как длина каждой строки равна 2^n, а различных строк из 0 и 1 длины 2^n имеется 2^{2^n}, то существует точно 2^{2^n} различных булевых функций от *n* переменных.

Например, для *n*=3 значения булевой функции можно записать в виде табл. 4.

Таблица 4

Таблица истинности для функции 3-х переменных

X_1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	$f(0,0,0)$	$f(0,0,1)$	$f(0,1,0)$	$f(0,1,1)$	$f(1,0,0)$	$f(1,0,1)$	$f(1,1,0)$	$f(1,1,1)$

В табл. 5 перечислим все булевы функции от 2-х переменных.

Таблица 5

Таблица истинности булевых функций 2-х переменных

X / f \ Y	0	0	1	1	Булева функция
	0	1	0	1	
f_1	0	0	0	0	$\equiv Л$ (тождественная ложь)
f_2	0	0	0	1	$X \wedge Y$
f_3	0	0	1	0	$X \wedge \overline{Y} \equiv \overline{X \to Y}$ (запрет по Y)
f_4	0	0	1	1	X
f_5	0	1	0	0	$\overline{X} \wedge Y \equiv \overline{Y \to X}$ (запрет по X)
f_6	0	1	0	1	Y
f_7	0	1	1	0	$(\overline{X} \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y}) \equiv X \oplus Y$ (сумма по mod 2)
f_8	0	1	1	1	$X \vee Y$
f_9	1	0	0	0	$\overline{X} \wedge \overline{Y} \equiv \overline{X \vee Y} \equiv X \downarrow Y$ (стрелка Пирса)
f_{10}	1	0	0	1	$(X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \equiv X \sim Y$ (эквивалентность)
f_{11}	1	0	1	0	$\overline{Y}$
f_{12}	1	0	1	1	$X \vee \overline{Y} \equiv Y \to X$ (импликатор по Y)
f_{13}	1	1	0	0	$\overline{X}$
f_{14}	1	1	0	1	$\overline{X} \vee Y \equiv X \to Y$ (импликатор по X)
f_{15}	1	1	1	0	$\overline{X} \vee \overline{Y} \equiv \overline{X \wedge Y} \equiv X \mid Y$ (штрих Шеффера)
f_{16}	1	1	1	1	$\equiv И$

6.2.2. Алгебра Жегалкина

Алгебра на множестве булевых функций с заданными на нем двумя операциями $\wedge$ и $\oplus$ называется алгеброй Жегалкина. В алгебре Жегалкина выполняются следующие равносильности:

1) $X \oplus Y = Y \oplus X$;

2) $X \wedge Y = Y \wedge X$;

3) $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$;

4) $(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z)$;

5) $X \oplus X = 0$;

6) $X \wedge X = X$;

7) $X \wedge (Y \oplus Z) = X \wedge Y \oplus X \wedge Z$;

8) $0 \oplus X = X$;

9) $0 \wedge X = 0$;

10) $1 \wedge X = X$;

11) $\overline{X} = X \oplus 1$;

12) $X \vee Y = \overline{\overline{X} \wedge \overline{Y}} = (1 \oplus X) \wedge (1 \oplus Y) \oplus 1 = X \wedge Y \oplus X \oplus Y$.

Многочленом Жегалкина функции $f(X_1,...X_n)$ называется многочлен вида

$$P(X_1,...X_n) = a_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \wedge X_i \oplus$$

$$\otimes \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} \wedge X_i \wedge X_j \oplus ... \oplus a_{12...n} \wedge X_1 \wedge X_2 \wedge ... \wedge X_n,$$

где коэффициенты многочлена $a_i \in \{0,1\}$.

Многочлен Жегалкина можно получить несколькими способами:

1. От булевой функции можно перейти к многочлену Жегалкина, используя вышеперечисленные равносильности.

Пример. Преобразуем булеву функцию $(X_1 \vee X_2) \wedge (\overline{X_2} \vee X_1 \wedge X_3)$ в многочлен Жегалкина, применяя равносильности 12, 7, 6, 11.

$$(X_1 \vee X_2) \wedge (\overline{X_2} \vee X_1 \wedge X_3) =$$
$$= (X_1 \wedge X_2 \oplus X_1 \oplus X_2) \wedge (\overline{X_2} \wedge X_1 \wedge X_3 \oplus \overline{X_2} \oplus X_1 \wedge X_3) =$$
$$= (X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_2} \wedge X_1 \wedge X_2) \oplus (X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge X_1 \wedge X_3) \oplus (X_2 \wedge \overline{X_2} \wedge X_1 \wedge X_3) \oplus$$
$$\oplus (X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_2}) \oplus (X_1 \wedge \overline{X_2}) \oplus (X_2 \wedge \overline{X_2}) \oplus (X_1 \wedge X_2 \wedge X_1 \wedge X_3) \oplus$$
$$\oplus (X_1 \wedge X_1 \wedge X_3) \oplus (X_2 \wedge X_1 \wedge X_3) = (X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge X_3) \oplus (X_1 \wedge \overline{X_2}) \oplus$$
$$\oplus (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \oplus (X_1 \wedge X_3) \oplus (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) =$$
$$= (X_1 \wedge (1 \oplus X_2) \wedge X_3) \oplus (X_1 \wedge (1 \oplus X_2)) \oplus X_1 \wedge X_3 = X_1 \wedge X_3 \oplus$$
$$\oplus X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \oplus X_1 \oplus X_1 \wedge X_2 \oplus X_1 \wedge X_3 = X_1 \oplus X_1 \wedge X_2 \oplus X_1 \wedge X_2 \wedge X_3.$$

2. Многочлен Жегалкина можно построить и по таблице истинности булевой функции.

Рассмотрим нахождение многочлена Жегалкина по таблице истинности булевой функции от 3-х переменных (табл. 6).

Таблица 6

Таблица истинности для функции 3-х переменных

X_1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8

Общий вид многочлена для функции 3-х переменных:

$$P(X_1, X_2, X_3) = a_0 \oplus a_1 \wedge X_1 \oplus a_2 \wedge X_2 \oplus a_3 \wedge X_3 \oplus a_{12} \wedge X_1 \wedge X_2 \oplus$$
$$\oplus a_{13} \wedge X_1 \wedge X_3 \oplus a_{23} \wedge X_2 \wedge X_3 \oplus a_{123} \wedge X_1 \wedge X_2 \wedge X_3.$$

Подставляем вместо X_1, X_2, X_3 в многочлен конкретные значения аргументов и приравниваем его к значению функции на этих же аргументах.

$$P(0,0,0) = f_1 = a_0 \oplus a_1 \wedge 0 \oplus a_2 \wedge 0 \oplus a_3 \wedge 0 \oplus \ldots \oplus a_{123} \wedge 0 \wedge 0 \wedge 0 = a_0.$$

Таким образом, мы нашли первый коэффициент $a_0 = f_1$.

$$P(0,0,1) = f_2 = a_0 \oplus a_1 \wedge 0 \oplus a_2 \wedge 0 \oplus a_3 \wedge 1 \oplus a_{12} \wedge 0 \wedge 0 \oplus a_{13} \wedge 0 \wedge 1 \oplus$$
$$\oplus a_{123} \wedge 0 \wedge 0 \wedge 1 = a_0 \oplus a_3.$$

Отсюда находим a_3, используя равносильности 5 и 8. И так далее.

Пример. Пусть функция $f(X_1, X_2, X_3)$ задана таблицей истинности (табл. 7). Найдём многочлен Жегалкина.

Таблица 7

Таблица истинности булевой функции

X_1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1 f_1	0 f_2	1 f_3	0 f_4	1 f_5	1 f_6	0 f_7	0 f_8

$P(0,0,0) = a_0 = f_1 = 1 \Rightarrow a_0 = 1;$

$P(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 = f_2 = 0 \Rightarrow a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1;$

$P(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 = f_3 = 1 \Rightarrow a_0 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0;$

$P(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = f_1 = 0, \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{23} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \oplus a_{23} = 0 \Rightarrow a_{23} = 0;$

$P(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = f_5 = 1 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0;$

$P(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = f_6 = 1 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{13} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \oplus a_{13} = 1 \Rightarrow a_{13} = 1;$

$P(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = f_7 = 0 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{12} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \oplus a_{12} = 0 \Rightarrow a_{12} = 1;$

$P(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = f_8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123} = 0 \Rightarrow 0 \oplus a_{123} = 0 \Rightarrow a_{123} = 0.$

Таким образом, многочлен Жегалкина для *f*:

$$P(X_1, X_2, X_3) = 1 \oplus 0 \wedge X_1 \oplus 0 \wedge X_2 \oplus 1 \wedge X_3 \oplus 1 \wedge X_1 \wedge X_2 \oplus 1 \wedge X_1 \wedge X_3 \oplus$$
$$\oplus 0 \wedge X_2 \wedge X_3 \oplus 0 \wedge X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 = 1 \oplus X_3 \oplus X_1 \wedge X_2 \oplus X_1 \wedge X_3.$$

Чтобы проверить правильность нахождения многочлена Жегалкина для функции, нужно для него составить таблицу истинности. Таблица истинности для многочлена Жегалкина должна совпадать с таблицей истинности для функции.

Пример. Проверим правильность нахождения многочлена Жегалкина (табл. 8). Сравнивая последние строки табл. 7 и 8, можно сделать вывод, что многочлен Жегалкина найден верно.

Таблица 8

Таблица истинности многочлена Жегалкина

X_1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$1 \oplus X_3$	1	0	1	0	1	0	1	0
$X_1 \wedge X_2$	0	0	0	0	0	0	1	1
$X_1 \wedge X_3$	0	0	0	0	0	1	0	1
$1 \oplus X_3 \oplus X_1 \wedge X_2$	1	0	1	0	1	0	0	1
$P(X_1, X_2, X_3)$	1	0	1	0	1	1	0	0

Теорема 22. Для любой булевой функции можно найти многочлен Жегалкина, и притом единственный.

Функция, у которой многочлен Жегалкина имеет вид

$$P(X_1,...X_n) = a_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \wedge X_i, \quad a_i \in \{0,1\},$$ называется линейной.

Все функции от одной переменной линейны. Линейными функциями от 2-х переменных являются $\oplus$ и $\sim$.

6.2.3. Полные системы булевых функций. Замкнутость. Базисы

Пусть $K = \{f_1(X_1,...,X_{n_1}), f_2(X_1,...,X_{n_2}),..., f_m(X_1,...,X_{n_m})\}$ – конечная система булевых функций.

Функция f называется суперпозицией ранга 1 (или элементарной суперпозицией) функций $f_1,..., f_m$, если f может быть получена одним из следующих способов:

1) переименованием некоторой переменной X_j какой-нибудь функции f_i, то есть $f = f_i(X_1,..., X_{j-1}, Y, X_{j+1},.., X_{ni})$, где Y может совпадать с любой переменной;

2) подстановкой некоторой функции $f_1\,(1 \le l \le m)$ вместо какой-либо переменной X_j в любой из функций $f_i \in K$, то есть $f = f_i\left(X_1,...,X_{j-1}, f_l\left(X_1,...,X_{nl}\right), X_{j+1},..,X_{ni}\right)$.

Суперпозиции ранга 1 образуют класс функций K^1. Класс функций, получающихся из функций класса K^{r-1} суперпозиций ранга r-1 с помощью элементарных суперпозиций, называется классом функций K^r суперпозиций ранга r.

Суперпозициями функций из K называются функции, входящие в какой-либо из классов K^r, r=1,2,...

Система булевых функций $\{f_1,..., f_m\}$ называется полной, если любая булева функция может быть выражена через функции $f_1,..., f_m$ с помощью суперпозиций.

Класс (множество) K булевых функций называется функционально замкнутым, если вместе с функциями этого класса он содержит и все их суперпозиции. Очевидно, что для доказательства замкнутости класса достаточно показать, что элементарные суперпозиции не выводят из этого класса.

Лемма 3. Любую функцию, зависящую от k переменных, можно представить как функцию, зависящую от n переменных, где $k \le n$.

Рассмотрим некоторые функционально-замкнутые классы.

1. Обозначим через T_0 класс всех булевых функций $f(X_1,..., X_n)$, сохраняющих константу 0, то есть функций, для которых выполнено равенство $f(0,..., 0) = 0$.

Пример. Основные булевы функции, принадлежащие и не принадлежащие классу T_0:

$0, X, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, X_1 \oplus X \in T_0$;

$1, \overline{X} \notin T_0$.

Докажем, что T_0 – замкнутый класс. Пусть функции $f_k, f_i \in T_0$. Покажем, что элементарная суперпозиция $\Phi(X_1,...,X_n) = f_k(X_1,...,f_i(X_1,...,X_n),...,X_n)$ тоже принадлежит T_0.

Это следует из равенства

$$\Phi(0,0,...,0) = f_k(0,...,f_i(0,0,...,0),...,0) = f_k(0,...,0) = 0.$$

2. Обозначим через T_1 класс всех булевых функций $f(X_1,...,X_n)$, сохраняющих константу 1, то есть функций, для которых выполнено равенство $f(1,...,1) = 1$.

Пример. Основные булевы функции, принадлежащие и не принадлежащие классу T_1:

$$1, X, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2 \in T_1;$$
$$0, \overline{X} \notin T_1.$$

Доказательство замкнутости класса аналогично доказательству замкнутости T_0.

3. Обозначим через S класс всех самодвойственных функций, то есть булевых функций, для которых $f^* = f$.

Пример. Основные булевы функции, принадлежащие и не принадлежащие классу *S*:

$$X, \overline{X} \in S;$$
$$X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2 \notin S.$$

Для самодвойственной функции имеет место равенство

$$f^*(X_1,...,X_n) = \overline{f}(\overline{X_1},...,\overline{X_n}) = f(X_1,...,X_n)$$

или

$$f(\overline{X_1},...,\overline{X_n}) = \overline{f}(X_1,...,X_n). \qquad (*)$$

Докажем, что S – замкнут. Пусть функции $f_k, f_i \in S$. Покажем, что элементарная суперпозиция тоже принадлежит S, то есть для суперпозиции Φ выполняется (*):

$$\Phi\left(\overline{X_1},...,\overline{X_n}\right)=f_k\left(\overline{X_1},...,f_i\left(\overline{X_1},...,\overline{X_n}\right),...,\overline{X_n}\right)=$$
$$=f_k\left(\overline{X_1},...,\overline{f_i},...,\overline{X_n}\right)=\overline{f_k}\left(X_1,...,f_i,...,X_n\right)=\overline{\Phi}\left(X_1,...,X_n\right).$$

4. Говорят, что для двух векторов $X=(X_1,...,X_n)$ и $Y=(Y_1,...,Y_n)$ выполнено отношение предшествования $X\prec Y$, если $\forall\, i=1,...,n\ \ X_i\le Y_i$.

Пример. Векторы, находящиеся в отношении предшествования: $(0,1,0,1)\prec(1,1,0,1)$.

Заметим, что не любые пары векторов находятся в отношении предшествования.

Пример. $(0,1),(1,0)$ в этом отношении не находятся.

Функция $f(X_1,...,X_n)$ называется монотонной, если для любых двух векторов X и Y, находящихся в отношении предшествования ($X\prec Y$), имеет место неравенство $f(X)\le f(Y)$.

Обозначим через M множество всех монотонных функций.

Пример. Основные булевы функции, принадлежащие и не принадлежащие классу M:

$$0,1,X,X_1\wedge X_2,X_1\vee X_2,\in M;$$
$$X_1\to X_2\notin M.$$

Докажем, что класс монотонных функций замкнут. Пусть функции $f_k,f_i\in M$. Покажем, что элементарная суперпозиция тоже принадлежит M, то есть выполняется неравенство $\Phi(X_1,...,X_n)\le\Phi(Y_1,...,Y_n)$.

Пусть

$$\Phi(X_1,...,X_n)=f_k\left(X_1,...,f_i(X_1,...,X_n),...,X_n\right);$$
$$\Phi(Y_1,...,Y_n)=f_k\left(Y_1,...,f_i(Y_1,...,Y_n),...,Y_n\right).$$

Так как $f_i\in M$, то $f_i(X_1,...,X_n)\le f_i(Y_1,...,Y_n)$. Следовательно, векторы

$$(X_1,...,f_i(X_1,...,X_n),...,X_n)\prec(Y_1,...,f_i(Y_1,...,Y_n),...,Y_n)$$

находятся в отношении предшествования. Отсюда

$$\Phi(X_1,...,X_n)\le\Phi(Y_1,...,Y_n).$$

5. Последним классом является класс L линейных функций.

Пример. Основные булевы функции, принадлежащие и не принадлежащие классу L:

$$0, 1, X, \overline{X}, X_1 \oplus X_2 \in L;$$
$$X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2 \notin L.$$

Докажем, что класс линейных функций замкнут. Пусть функции $f_k, f_i \in L$. Покажем, что элементарная суперпозиция тоже принадлежит L.

Напомним, что линейная функция раскладывается в многочлен Жегалкина в виде

$$P = a_0 \oplus a_1 \wedge X_1 \oplus ... \oplus a_n \wedge X_n.$$

Так как $f_k, f_i \in L$, то

$$f_k(X_1,..., X_n) = a_0 \oplus a_1 \wedge X_1 \oplus ... \oplus a_n \wedge X_n;$$
$$f_i(X_1,..., X_n) = b_0 \oplus b_1 \wedge X_1 \oplus ... \oplus b_n \wedge X_n.$$

Тогда

$$\Phi(X_1,..., X_n) = f_k(X_1,..., f_i(X_1,..., X_n),..., X_n) =$$
$$= a_0 \oplus a_1 \wedge X_1 \oplus ... \oplus a_i \wedge f_i \oplus ... \oplus a_n \wedge X_n =$$
$$a_0 \oplus a_1 \wedge X_1 \oplus ... \oplus a_i \wedge (b_0 \oplus b_1 \wedge X_1 \oplus ... \oplus b_n \wedge X_n) \oplus ... \oplus$$
$$\oplus a_n \wedge X_n = c_0 \oplus c_1 \wedge X_1 \oplus ... \oplus c_n \wedge X_n,$$

где $c_j = a_j \oplus a_i \wedge b_j$.

Кроме перечисленных, можно указать и много других функционально замкнутых классов. Но для проверки полноты системы булевых функций можно ограничиться рассмотренными пятью фундаментальными замкнутыми классами. Рассмотрим теорему Поста.

Теорема 23. Для того чтобы система булевых функций $\{f_1,..., f_m\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов T_0, T_1, S, M, L нашлась функция из системы, не принадлежащая этому классу.

Для проверки полноты по этой теореме удобно пользоваться таблицей Поста (табл. 9). Если функция принадлежит классу, то в соответствующей

ячейке ставится знак «+», иначе – знак «–». При полной системе булевых функций (по теореме Поста) в каждом столбце должен стоять хотя бы один минус.

Таблица 9

Таблица Поста

f	T_0	T_1	L	S	M
f_1	+	–	–	+	–
...	...	...	...	...	...
f_m	–	+	–	+	–

Пример. Проверим полноту системы $\{0, 1, \overline{X}\}$, результаты приведем в табл. 10. Так как в столбце L нет ни одного минуса, рассматривая система не полная.

Таблица 10

Таблица Поста системы $\{0, 1, \overline{X}\}$

f	T_0	T_1	L	S	M
0	+	–	+	–	+
1	–	+	+	–	+
$\overline{X}$	–	–	+	+	–

Пример. Нетрудно проверить, что полными системами являются:

1) $\{\overline{X}, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2\}$;

2) $\{1, X_1 \wedge X_2, X_1 \oplus X_2\}$.

Система K называется базисом, если существует такая $f \in K$, что при ее удалении теряется полнота системы.

Приведем таблицу Поста для всех функций от 2-х переменных (табл. 11).

Таблица 11

Таблица Поста булевых функций 2-х переменных

f_i	T_0	T_1	L	S	M	Булева функция
f_1	+	–	–	+	+	$\equiv Л$ (тождественная ложь)
f_2	+	+	–	–	+	$X \wedge Y$
f_3	+	–	–	–	–	$X \wedge \overline{Y} \equiv \overline{X \to Y}$ (запрет по Y)
f_4	+	+	+	+	+	X
f_5	+	–	–	–	–	$\overline{X} \wedge Y \equiv \overline{Y \to X}$ (запрет по X)
f_6	+	+	+	+	+	Y
f_7	+	–	–	+	–	$\left(\overline{X} \wedge Y\right) \vee \left(X \wedge \overline{Y}\right) \equiv X \oplus Y$ (сумма по mod 2)
f_8	+	+	–	–	+	$X \vee Y$
f_9	–	–	–	–	–	$\overline{X} \wedge \overline{Y} \equiv \overline{X \vee Y} \equiv X \downarrow Y$ (стрелка Пирса)
f_{10}	–	+	–	+	–	$\left(X \wedge Y\right) \vee \left(\overline{X} \wedge \overline{Y}\right) \equiv X \sim Y$ (эквивалентность)
f_{11}	–	–	+	+	–	$\overline{Y}$
f_{12}	–	+	–	–	–	$X \vee \overline{Y} \equiv Y \to X$ (импликатор по Y)
f_{13}	–	–	+	+	–	$\overline{X}$
f_{14}	–	+	–	–	–	$\overline{X} \vee Y \equiv X \to Y$ (импликатор по X)
f_{15}	–	–	–	–	–	$\overline{X} \vee \overline{Y} \equiv \overline{X \wedge Y} \equiv X \mid Y$ (штрих Шеффера)
f_{16}	–	+	–	+	+	$\equiv И$

Пример. Базисами являются:

1) $\left\{\overline{X}, X_1 \wedge X_2\right\}$;

2) $\left\{\overline{X}, X_1 \vee X_2\right\}$;

3) $\left\{X_1 \mid X_2\right\}$;

4) $\left\{X_1 \downarrow X_2\right\}$.

Для каждой булевой функции существует равносильная, выраженная через функции любого из базисов. Например, любую функцию можно выразить только через $\downarrow$ или только через $\mid$.

Основные операции $\wedge, \vee, \bar{}$ через остальные выражаются так:

1) $\overline{X} = X \mid X = X \downarrow X$;

2) $X \vee Y = (X \mid X) \mid (Y \mid Y)$;

3) $X \wedge Y = (X \mid Y) \mid (X \mid Y)$;

4) $X \vee Y = (X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y)$;

5) $X \wedge Y = (X \downarrow X) \downarrow (Y \downarrow Y)$;

6) $X \vee Y = \overline{X} \to Y = \overline{Y} \to X = X \to Y \to X$;

7) $X \wedge Y = \overline{X \to \overline{Y}} = \overline{Y \to \overline{X}}$.

Пример. Составим таблицу истинности функции (табл. 12):

$$a \to b \wedge (\bar{a} \to b) = a \to b \wedge (a \wedge b) = a \to b = \bar{a} \vee b.$$

Таблица 12

Таблица истинности

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$\bar{a}$	1	1	0	0
$\bar{a} \vee b$	1	1	0	1

Составляем СКНФ или СДНФ: $(\bar{a} \vee b) =$ СДНФ.

Выразим функцию через |:

$$\bar{a} = a \mid a; \quad (a \mid a) \vee b = [(a \mid a) \mid (a \mid a)] \mid (b \mid b).$$

Выразим через $\downarrow$:

$$\bar{a} = a \downarrow a; \quad (a \downarrow a) \vee b = [(a \downarrow a) \downarrow b] \downarrow [(a \downarrow a) \downarrow b].$$

6.2.4. Дифференцирование булевых функций

Производной первого порядка $\dfrac{\partial f}{\partial X_i}$ от булевой функции $f(X_1, ..., X_n)$ по переменной X_i называется функция

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = f(X_1, X_2, ..., X_{i-1}, 1, ..., X_n) \oplus f(X_1, X_2, ...X_{i-1}, 0, ..., X_n),$$

где $f(X_1, X_2, ..., X_{i-1}, 1, ..., X_n)$ – единичная остаточная функция; $f(X_1, X_2, ..., X_{i-1}, 0, ..., X_n)$ – нулевая остаточная функция.

Единичная остаточная функция получается в результате приравнивания переменной X_i к единице, нулевая – приравниваем X_i к нулю.

Пример. Найдём производные функции: $f = a \sim b \vee c$.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = (1 \sim b \vee c) \oplus (0 \sim b \vee c) =$$
$$= \left([1 \wedge (b \vee c)] \vee \left[0 \wedge \overline{(b \vee c)}\right]\right) \oplus \left([0 \wedge (b \vee c)] \vee \left[1 \wedge \overline{(b \vee c)}\right]\right) =$$
$$= (b \vee c) \oplus (\bar{b} \wedge \bar{c}) = \left(\overline{b \vee c} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}\right) \vee \left((b \vee c) \wedge \overline{(\bar{b} \wedge \bar{c})}\right) =$$
$$= \left(\bar{b} \wedge \bar{c} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}\right) \vee ((b \vee c) \wedge (b \vee c)) =$$
$$= (\bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (b \vee c) = (\bar{b} \wedge \bar{c}) \vee b \vee c;$$
$$\frac{\partial f}{\partial b} = (a \sim 1 \vee c) \oplus (a \sim 0 \vee c) = (a \sim 1) \oplus (a \sim c) = a \oplus (a \sim c);$$
$$\frac{\partial f}{\partial c} = (a \sim b \vee 1) \oplus (a \sim b \vee 0) = (a \sim 1) \oplus (a \sim b) = a \oplus (a \sim b).$$

Теорема 24. При значениях переменных, при которых производная 1-го порядка $\frac{\partial f}{\partial X_i} = 1$, функция $f(X_1, ..., X_n)$ изменяет значение на противоположное при изменении значения X_i и при одинаковых остальных значениях переменных.

Пример. Утверждение теоремы проверим на примере. Если $\frac{\partial f}{\partial X_i}(X_1 = a_1, ..., X_{i-1} = a_{i-1}, X_{i+1} = a_{i+1}, ..., X_n = a_n) = 1$, то функция f изменяет своё значение на противоположное:

1) при изменении значения *a*, когда $(\bar{b} \wedge \bar{c}) \vee b \vee c \equiv И$;

2) при изменении значения *b*, когда $a \oplus (a \sim c) \equiv И$;

3) при изменении значения *c*, когда $a \oplus (a \sim b) \equiv И$.

Составим таблицы истинности для исходной функции (табл. 13) и для ее производных (табл. 14–16).

Таблица 13

Таблица истинности $f = a \sim b \vee c$

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$b \vee c$	0	1	1	1	0	1	1	1
$a \sim (b \vee c)$	1	0	0	0	0	1	1	1

Таблица 14

Таблица истинности $\frac{\partial f}{\partial a}$

b	0	0	1	1
c	0	1	0	1
$\bar{b}$	1	1	0	0
$\bar{c}$	1	0	1	0
$\bar{b} \wedge \bar{c}$	1	0	0	0
$(\bar{b} \wedge \bar{c}) \vee b$	1	0	1	1
$(\bar{b} \wedge \bar{c}) \vee b \vee c$	1	1	1	1

Таблица 15

Таблица истинности $\frac{\partial f}{\partial b}$

a	0	0	1	1
c	0	1	0	1
$a \sim c$	1	0	0	1
$a \oplus (a \sim c)$	1	0	1	0

Таблица 16

Таблица истинности $\frac{\partial f}{\partial c}$

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$a \sim b$	1	0	0	1
$a \oplus (a \sim b)$	1	0	1	0

Можно заметить следующие закономерности:

$f(0,0,0)=1,$ $f(0,0,0)=1,$ $f(0,0,0)=1,$
$f(1,0,0)=0,$ $f(0,1,0)=0,$ $f(0,0,1)=0,$

$f(0,0,1)=0,$ $f(1,0,0)=0,$ $f(1,0,0)=0,$
$f(1,0,1)=1,$ $f(1,1,0)=1,$ $f(1,0,1)=1,$

$f(0,1,0)=0,$ $f(0,1,1)=0,$
$f(1,1,0)=1,$ $f(1,1,1)=1.$

Следовательно, утверждение теоремы для рассмотренного примера справедливо.

Смешанной производной $\dfrac{\partial^k f}{\partial X_{i_1},\partial X_{i_2},...,\partial X_{i_k}}$ от булевой функции $f(X_1,...,X_n)$ по переменным $X_{i_1},...,X_{i_k}$ называется функция

$$\frac{\partial_k f}{\partial X_{i_1},\partial X_{i_2},...,\partial X_{i_k}}=\frac{\partial}{\partial X_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial X_{l_1},\partial X_{i_2},...,\partial X_{i_{k-1}}}\right).$$

Общей производной k-го порядка $\dfrac{\partial^k f}{\partial\left(X_{i_1},...,X_{i_k}\right)}$ от булевой функции $f(X_1,...,X_n)$ по переменным $X_{i_1},...,X_{i_k}$ называется функция

$$\frac{\partial^k f}{\partial\left(X_{i_1},...,X_{i_k}\right)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_i}\oplus\sum_{\substack{i,j,\\ i\neq j}}\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\partial X_j}\oplus\sum_{\substack{i,j,s,\\ i\neq j,j\neq s,i\neq s}}\frac{\partial^3 f}{\partial X_i\partial X_j\partial X_s}\oplus...\oplus\frac{\partial^k f}{\partial X_{i_1}\partial X_{i_2}...\partial X_{i_k}}.$$

Общая производная k-го порядка $\dfrac{\partial^k f}{\partial\left(X_{i_1},...,X_{i_k}\right)}$ от булевой функции $f(X_1,...,X_n)$ по переменным $X_{i_1},...,X_{i_k}$ определяет условия, при которых эта функция изменяет значение при одновременном изменении значений переменных $X_{i_1},...,X_{i_k}$ и при одинаковых остальных значениях переменных.

Пример. Пусть $f(a,b,c)=a\bar{b}\oplus\bar{a}bc$. Найдём смешанную производную $\frac{\partial^3 f}{\partial a\partial b\partial c}$.

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\left(1\wedge\bar{b}\oplus 0\wedge b\wedge c\right)\oplus\left(0\wedge\bar{b}\oplus 1\wedge b\wedge c\right)=\bar{b}\oplus bc;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}=\left(0\oplus 1\wedge c\right)\oplus\left(1\oplus 0\wedge c\right)=c\oplus 1;$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial a\partial b\partial c}=\left(1\oplus 1\right)\oplus\left(0\oplus 1\right)=1.$$

Пример. Найдём общую производную 2-го порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial(a,b)}$ функции $f(a,b,c)=a\bar{b}\oplus\bar{a}bc$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(a,b)}=\frac{\partial f}{\partial a}\oplus\frac{\partial f}{\partial b}\oplus\frac{\partial f}{\partial a\partial b};$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}=\bar{b}\oplus bc;$$
$$\frac{\partial f}{\partial b}=\left(a0\oplus\bar{a}1c\right)\oplus\left(a1\oplus\bar{a}0c\right)=a\oplus\bar{a}c;$$
$$\frac{\partial f}{\partial a\partial b}=c\oplus 1;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial(a,b)}=\bar{b}\oplus bc\oplus a\oplus\bar{a}c\oplus c\oplus 1=b\oplus bc\oplus a\oplus\bar{a}c\oplus c.$$

Составим таблицы истинности для исходной функции (табл. 17) и ее общей производной 2-го порядка (табл. 18).

Таблица 17

Таблица истинности $f=a\bar{b}\oplus\bar{a}bc$

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$\bar{b}$	1	1	0	0	1	1	0	0
$a\bar{b}$	0	0	0	0	1	1	0	0
$\bar{a}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{a}bc$	0	0	0	1	0	0	0	0
f	0	0	0	1	1	1	0	0

Таблица 18

Таблица истинности $\frac{\partial^2 f}{\partial(a,b)}$

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$\bar{b}$	1	1	0	0	1	1	0	0
bc	0	0	0	1	0	0	0	1
$\bar{b} \oplus bc$	1	1	0	1	1	1	0	1
$\bar{a}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{a}c$	0	1	0	1	0	0	0	0
$\bar{b} \oplus bc \oplus a$	1	1	0	1	0	0	1	0
$\bar{b} \oplus bc \oplus a \oplus \bar{a}c$	1	0	0	0	0	0	1	0
$\bar{b} \oplus bc \oplus a \oplus \bar{a}c \oplus c$	1	1	0	1	0	1	1	1
$\frac{\partial^2 f}{\partial(a,b)}$	0	0	1	0	1	0	0	0

Функция f меняет значение при одновременном переключении значений a,b в том случае, когда $\bar{b} \oplus bc \oplus a \oplus \bar{a}c \oplus c \oplus 1 = 1$, т.е.

$$f(0,1,0) = 0, \qquad f(1,0,0) = 1,$$
$$f(1,0,0) = 1, \qquad f(0,1,0) = 0.$$

Вычислим общую производную 3-го порядка функции.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial(a,b,c)} = \frac{\partial f}{\partial a} \oplus \frac{\partial f}{\partial b} \oplus \frac{\partial f}{\partial c} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial c} \oplus \frac{\partial^3 f}{\partial a \partial b \partial c};$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \bar{b} \oplus bc;$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = a \oplus \bar{a}c;$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \left(a\bar{b} \oplus \bar{a}b1\right) \oplus \left(a\bar{b} \oplus \bar{a}b0\right) = \bar{a}b;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = c \oplus 1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c} = \left(\bar{b} \oplus b1\right) \oplus \left(\bar{b} \oplus b0\right) = b;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial c} = \left(a \oplus \bar{a}1\right) \oplus \left(a \oplus \bar{a}0\right) = \bar{a};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial a \partial b \partial c} = 1;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial (a,b,c)} = \bar{b} \oplus bc \oplus a \oplus \bar{a}c \oplus \bar{a}b \oplus c \oplus 1 \oplus b \oplus \bar{a} \oplus 1 =$$

$$= 1 \oplus 1 \oplus bc \oplus \bar{a}c \oplus \bar{a}b \oplus c = bc \oplus \bar{a}c \oplus \bar{a}b \oplus c.$$

Составим таблицу истинности для общей производной 3-го порядка (табл. 19).

Таблица 19

Таблица истинности $\frac{\partial^3 f}{\partial (a,b,c)}$

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
bc	0	0	0	1	0	0	0	1
$\bar{a}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{a}c$	0	1	0	1	0	0	0	0
$\bar{a}b$	0	0	1	1	0	0	0	0
$bc \oplus \bar{a}c$	0	1	0	0	0	0	0	1
$bc \oplus \bar{a}c \oplus \bar{a}b$	0	1	1	1	0	0	0	1
$\frac{\partial^3 f}{\partial (a,b,c)}$	0	0	1	0	0	1	0	0

Функция f меняет значение при одновременном переключении значений a,b,c в том случае, когда $bc \oplus \bar{a}c \oplus \bar{a}b \oplus c = 1$, т.е.

$$f(0,1,0) = 0,$$
$$f(1,0,1) = 1.$$

6.2.5. Контактные схемы

Рассмотрим одно из приложений логики высказываний – ее применение к теории электрических цепей, а именно – к контактным схемам.

Пусть $X_1,...,X_n$ – набор контактов в электрической схеме. Контакты могут быть размыкающими и замыкающими.

Контакт называется размыкающим, если он размыкается при подаче напряжения на обмотку реле, к которому он подключен, а когда напряжение не подается, контакт замкнут.

Контакт называется замыкающим, если он замыкается при подаче напряжения на обмотку реле, к которому он подключен, а когда напряжение не подается, контакт разомкнут.

В схеме один и тот же контакт мажет неоднократно быть как размыкающим, так и замыкающим.

Будем считать, что $X_i = 1$, если на обмотку контакта X_i подается напряжение, и $X_i = 0$ – в противном случае.

Каждой контактной схеме с контактами $X_1,...,X_n$ поставим в соответствие её функцию проводимости:

$$f(X_1,...,X_n) = \begin{cases} 1, \text{если схема проводит ток;} \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Введём обозначение: $X^{\varepsilon} = \begin{cases} X, \varepsilon = 1; \\ \overline{X}, \varepsilon = 0. \end{cases}$

Тогда формула проводимости схемы, состоящей из одного контакта X_i равна $X_i^{\varepsilon_i}$, где $\varepsilon_i = 1$, если контакт замыкающий, $\varepsilon_i = 0$ – иначе.

Функция проводимости схемы из последовательно соединённых контактов X_i и X_j есть $X_i^{\varepsilon_i} \wedge X_j^{\varepsilon^j}$, а функция проводимости схемы из параллельно соединённых контактов – $X_i^{\varepsilon_i} \vee X_j^{\varepsilon^j}$. Последовательно и параллельно соединенные контакты изображены на рис. 70.

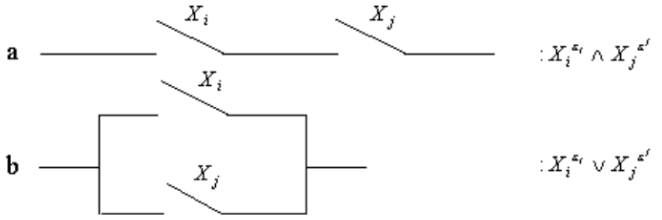


Рис. 70. Последовательное (*a*) и параллельное (*b*) соединение

Таким образом, каждой контактной схеме можно поставить в соответствие формулу логики высказываний, реализующую функцию проводимости этой схемы.

Две схемы считаются эквивалентными, если они одновременно проводят (или не проводят) ток при подаче напряжения на одноименные контакты, то есть если они имеют одинаковую функцию проводимости.

Применяя равносильности логики высказываний, можно упростить контактные схемы, заменить их эквивалентными, содержащими меньшее число контактов.

Пример. Заменим функцию проводимости и упростим электрическую схему на рис. 71.

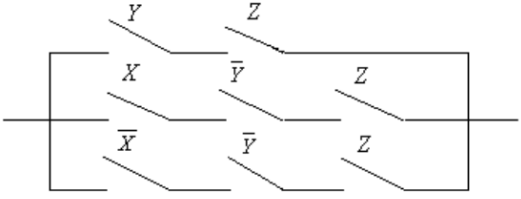


Рис. 71. Исходная электрическая схема

Упростим функцию проводимости, применяя равносильности логики высказываний:

$$(Y \wedge X) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge Z) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z) = (Y \wedge Z) \vee ((X \vee \overline{X}) \wedge (\overline{Y} \wedge Z)) =$$
$$= (Y \wedge Z) \vee (\overline{Y} \wedge Z) = (Y \vee \overline{Y}) \wedge Z = Z.$$

Схема после упрощения, эквивалентная исходной функции проводимости, представлена на рис. 72.

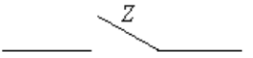


Рис. 72. Упрощенная электрическая схема

6.2.6. Применение метода каскадов для упрощения контактных схем

Для упрощения контактных схем можно применять и метод каскадов, который позволяет свести реализацию булевой функции от n переменных к реализации функций от $n-k$ ($k \geq 0$) переменных.

Метод каскадов основан на следующих фактах:

1) если исключается одна переменная, то

$$f(X_1,...,X_n)=\left(f(X_1,...,0,...,X_n)\wedge\overline{X_i}\right)\vee\left(f(X_i,...,1,...,X_n)\wedge X_i\right);$$

2) если исключается две переменные, то

$$f(X_1,...,X_n)=\left(f(0,0)\wedge\overline{X_i}\wedge\overline{X_j}\right)\vee\left(f(0,1)\wedge\overline{X_i}\wedge X_j\right)\vee$$
$$\vee\left(f(0,0)\wedge X_i\wedge\overline{X_j}\right)\vee\left(f(1,1)\wedge X_i\wedge X_j\right).$$

Критерий оптимального исключения переменных в методе каскадов заключается в исключении сначала переменных, при переключении которых булева функция переключается при максимальном числе условий.

Это максимальное число определяется весом производной. Весом производной булевой функции называется число единиц в этой производной.

При использовании блоков, исключающих k переменных, находят производные k-го порядка от реализуемой функции и ищут максимальное значение веса производной $P\left(\dfrac{\partial^k f}{\partial\left(X_{i_1},X_{i_2},...,X_{i_k}\right)}\right)$, которое и определяет исключаемые переменные.

Для полученных остаточных функций снова находятся производные. Определяются веса, а производная от рассматриваемой остаточной функции, имеющая максимальный вес, определяет соответствующие переменные, которые исключаются на этом ярусе для этой остаточной функции, и т. д., пока остаточные функции не будут иметь простую реализацию.

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(X_1, X_2, X_3) = \overline{X_1} \to (X_2 \vee X_3) \to (\overline{X_1} \wedge X_3) \sim \overline{X_2} =$$
$$= (X_1 \vee X_2 \vee X_3) \to (\overline{X_1} \wedge X_3) \sim \overline{X_2} = (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (\overline{X_1} \wedge X_3) \sim \overline{X_2}.$$

Найдем ее производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = (0 \vee 0 \sim \overline{X_2}) \oplus ((\overline{X_2} \wedge \overline{X_3}) \vee X_3 \sim \overline{X_2}) =$$
$$= (0 \sim \overline{X_2}) \oplus ((\overline{X_2} \wedge \overline{X_3}) \vee X_3 \sim \overline{X_2}) = X_2 \oplus ((\overline{X_2} \wedge \overline{X_3}) \vee X_3 \sim X_2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} = (0 \vee (\overline{X_1} \wedge X_3) \sim 0) \oplus ((\overline{X_1} \wedge \overline{X_3}) \vee (\overline{X_1} \wedge X_3) \sim 1) =$$
$$= [(\overline{X_1} \wedge X_3 \wedge 0)] \oplus (\overline{X_1} \sim 1) = (X_1 \vee X_3) \oplus$$
$$\oplus ((\overline{X_1} \wedge 1) \vee (X_1 \wedge 0)) = (X_1 \vee \overline{X_3}) \oplus \overline{X_1};$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_3} = (0 \vee \overline{X_1} \sim \overline{X_2}) \oplus ((\overline{X_1} \wedge \overline{X_2}) \vee 0 \sim \overline{X_2}) =$$
$$= (\overline{X_1} \sim \overline{X_2}) \oplus ((\overline{X_1} \wedge \overline{X_2}) \sim \overline{X_2}).$$

Таблицы истинности производных первого порядка приведены в табл. 19-21.

Таблица 19

Таблица истинности $\frac{\partial f}{\partial X_1}$

X_2	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1
$\overline{X_2}$	1	1	0	0
$\overline{X_3}$	1	0	1	0
$\overline{X_2} \wedge \overline{X_3}$	1	0	0	0
$\overline{X_2} \wedge \overline{X_3} \vee X_3$	1	1	0	1
$\overline{X_2} \wedge \overline{X_3} \vee X_3 \sim \overline{X_2}$	1	1	1	0
$\frac{\partial f}{\partial X_1}$	1	1	0	1

Таблица 20

Таблица истинности $\frac{\partial f}{\partial X_2}$

X_1	0	0	1	1
X_2	0	1	0	1
$\overline{X_3}$	1	0	1	0
$X_1 \wedge \overline{X_3}$	1	0	1	1
$\overline{X_1}$	1	1	0	0
$\frac{\partial f}{\partial X_2}$	0	1	1	1

Таблица 21

Таблица истинности $\frac{\partial f}{\partial X_3}$

X_1	0	0	1	1
X_2	0	1	0	1
$\overline{X_1}$	1	1	0	0
$\overline{X_2}$	1	1	0	0
$\overline{X_1} \sim \overline{X_2}$	1	0	0	1
$\overline{X_1} \wedge \overline{X_2}$	1	0	0	0
$\overline{X_1} \wedge \overline{X_2} \sim X_2$	1	1	0	1
$\frac{\partial f}{\partial X_3}$	0	1	0	0

Вес производных первого порядка

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right) = 3; P\left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right) = 3; P\left(\frac{\partial f}{\partial X_3}\right) = 1.$$

Заметим, что $\max P\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right) = 3$ при i=1, 2. Исключим, например, X_1. При этом получим 2 остаточные функции:

$$f(1)=f(1,X_2,X_3)=0\vee 0\sim\overline{X_2}=\left(0\wedge\overline{X_2}\right)\vee\left(1\wedge X_2\right)=X_2;$$
$$f(0)=f(0,X_2,X_3)=\left(\overline{X_2}\wedge\overline{X_3}\right)\vee\overline{X_3}\sim X_2.$$

Остаточная функция $f(1)$ имеет простую реализацию. Упростим функцию $f(0)$. Для этого найдем ее производные первого порядка:

$$\frac{\partial f(0)}{\partial X_2}=\left(0\vee\overline{X_3}\sim 0\right)\oplus\left(\overline{X_3}\vee\overline{X_3}\sim 1\right)=X_3\oplus\left(\overline{X_3}\sim 1\right)=$$
$$=X_3\oplus\left(\overline{X_3}\wedge 1\right)\vee\left(X_3\wedge 0\right)=X_3\oplus X_3=1;$$
$$\frac{\partial f(0)}{\partial X_3}=\left(0\vee 0\sim\overline{X_2}\right)\oplus\left(\overline{X_2}\vee 1\sim\overline{X_2}\right)=\overline{X_2}\oplus\left(\overline{X_2}\sim\overline{X_2}\right)=\overline{X_2}\oplus 1=$$
$$=\left(X_2\wedge 1\right)\oplus\left(\overline{X_2}\wedge 0\right)=X_2.$$

Вес производных первого порядка функции $f(0)$:

$$P\left(\frac{\partial f(0)}{\partial X_2}\right)=2;\ P\left(\frac{\partial f(0)}{\partial X_3}\right)=1.$$

Следовательно, исключаем X_2:

$$f(0,1)=f(0,1,X_3)=\left(0\wedge\overline{X_3}\right)\vee\overline{X_3}\sim 1=\overline{X_3}\sim 1=\overline{X_3};$$
$$f(0,0)=f(0,0,X_3)=\left(1\wedge\overline{X_3}\right)\vee\overline{X_3}\sim 0=\overline{X_3}\sim 0=X_3.$$

В результате получаем разложение функции:

$$f=\left(\left(\left(f(0,1)\wedge X_2\right)\vee\left(f(0,0)\wedge\overline{X_2}\right)\right)\wedge\overline{X_1}\right)\vee\left(f(1)\wedge X_1\right)=$$
$$=\left(\left(\left(\overline{X_3}\wedge X_2\right)\vee\left(X_3\wedge\overline{X_2}\right)\right)\wedge\overline{X_1}\right)\vee\left(X_2\wedge X_1\right).$$

Соответствующая контактная схема изображена на рис. 73.

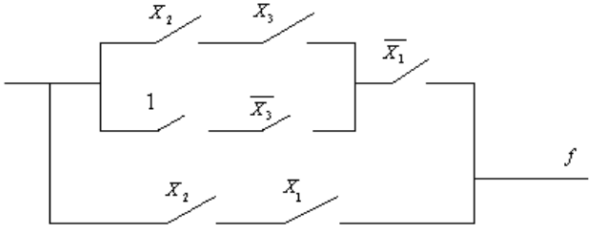


Рис. 73. Контактная схема после упрощения функции

6.2.7. Разложение булевой функции в заданной точке пространства

В дискретной математике отсутствует понятие предела, однако в предыдущих пунктах использовался термин «производная». Это связано с возможностью разложения булевой функции в ряд, аналогичный ряду Маклорена в точке $(0, 0,\ldots,0)$ или ряду Тейлора в произвольной точке пространства. Таким рядом является многочлен Жегалкина.

Запишем его в общем виде для функции n переменных:

$$P(X_1,...,X_n) = a_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \wedge X_i \oplus \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j.}} a_{ij} \wedge X_i \wedge X_j \oplus ... \oplus$$

$$\oplus\, a_{12...n} \wedge X_1 \wedge X_2 \wedge ... \wedge X_n.$$

Докажем некоторые свойства операции дифференцирования булевых функций.

Теорема 25. Для булевых функций справедливы следующие равенства:

$$1)\ \frac{\partial(f \oplus \phi)}{\partial X_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \oplus \frac{\partial \phi}{\partial X_i},\ i = 1,...,n;$$

$$2)\ \frac{\partial}{\partial X_i}(X_1 \wedge ... \wedge X_n) = X_1 \wedge ... \wedge X_{i-1} \wedge X_{i+1} \wedge ... \wedge X_n;$$

$$3)\ \frac{\partial c}{\partial X_i} = 0, \text{ где } c = \text{const}(0 \text{ или } 1).$$

Доказательство:

$$1)\ \frac{\partial(f(X_1,...,X_n) \oplus \phi(X_1,...,X_n))}{\partial X_i} = f(X_1,...,0,...,X_n) \oplus$$

$$\oplus\, f(X_1,...,1,...,X_n) \oplus \phi(X_1,...,0,...,X_n) \oplus \phi(X_1,...,1,...,X_n) = \frac{\partial f}{\partial X_i} \oplus \frac{\partial \phi}{\partial X_i};$$

$$2)\ \frac{\partial}{\partial X_i}(X_1 \wedge ... \wedge X_n) = X_1 \wedge ... \wedge 0 \wedge ... \wedge X_n \oplus X_1 \wedge ... \wedge 1 \wedge ... \wedge X_n =$$

$$= X_1 \wedge ... \wedge X_{i-1} \wedge X_{i+1} \wedge ... \wedge X_n;$$

$$3)\ \frac{\partial c}{\partial X_i} = c \oplus c = 0.\ \triangleleft$$

Последовательно продифференцируем многочлен Жегалкина по переменным $X_1,...,X_n$ и определим значение этой производной в точке (0, 0,…, 0).

$$\frac{\partial P(X_1,...,X_n)}{\partial X_1} = \frac{\partial a_0}{\partial X_1} \oplus \frac{\partial (a_1 \wedge X_1)}{\partial X_1} \oplus \frac{\partial (a_2 \wedge X_2)}{\partial X_1} \oplus ... \oplus \frac{\partial (a_n \wedge X_n)}{\partial X_n} \oplus$$
$$\oplus \frac{\partial (a_{12} \wedge X_1 \wedge X_2)}{\partial X_1} \oplus \frac{\partial (a_{13} \wedge X_1 \wedge X_3)}{\partial X_1} \oplus ... \oplus \frac{\partial (a_{1n} \wedge X_1 \wedge X_n)}{\partial X_1} \oplus$$
$$\oplus \frac{\partial (a_{23} \wedge X_2 \wedge X_3)}{\partial X_1} \oplus ... \oplus \frac{\partial (a_{n-1,n} \wedge X_{n-1} \wedge X_n)}{\partial X_1} \oplus ... \oplus$$
$$\oplus \frac{\partial (a_{12...n} \wedge X_1 \wedge ... \wedge X_n)}{\partial X_1} = 0 \oplus a_1 \oplus 0 \oplus a_{12} \wedge X_2 \oplus a_{13} \wedge X_3 \oplus ... \oplus$$
$$\oplus a_{1n} \wedge X_n \oplus a_{123} \wedge X_2 \wedge X_3 \oplus a_{124} \wedge X_2 \wedge X_4 \oplus ... \oplus$$
$$\oplus a_{1,n-1,n} \wedge X_{n-1} \wedge X_n \oplus ... \oplus a_{12...n} \wedge X_2 \wedge ... \wedge X_n;$$

$$\frac{\partial^2 P(X_1,...,X_n)}{\partial X_1 \partial X_2} = a_{12} \oplus a_{123} \wedge X_3 \oplus a_{124} \wedge X_4 \oplus ... \oplus$$
$$\oplus a_{12n} \wedge X_n \oplus ... \oplus a_{12...n} \wedge X_3 \wedge ... \wedge X_n;$$

$$\frac{\partial^3 P(X_1,...,X_n)}{\partial X_1 \partial X_2 \partial X_3} = a_{123} \oplus ... \oplus a_{12...n} \wedge X_4 \wedge ... \wedge X_n;$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^k P(X_1,...,X_n)}{\partial X_1 ... \partial X_k} = a_{12...k} \oplus ... \oplus a_{12...n} \wedge X_{k+1} \wedge ... \wedge X_n.$$

После дифференцирования по переменным $X_1,...,X_n$ все члены в разложении Жегалкина до $a_{12...k}$ обращаются в 0, а в результате подстановки (0, 0,…,0) остальные члены этого разложения, кроме $a_{12...k}$, также будут равны 0. Отсюда получим теорему о разложении любой булевой функции $f(X_1,...,X_n)$ в точке (0, 0,…,0).

Теорема 26. Любая булева функция $f(X_1,...,X_n)$ представима своим значением в точке (0, 0,…,0) и значениями всех производных $f; \frac{\partial f}{\partial X_{i_1}}; \frac{\partial^2 f}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2}}; ...; \frac{\partial^n f}{\partial X_1 ... \partial X_n}$ в этой точке в виде

$$f(X_1,...,X_n)=f(0,0,...,0)\oplus\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_i}(00...0)\wedge X_i\oplus$$

$$\oplus\sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j.}}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\partial X_j}(00...0)\wedge X_i\wedge X_j\oplus...$$

$$...\oplus\frac{\partial^n f}{\partial X_1...\partial X_n}(00...0)\wedge X_1\wedge...\wedge X_n.$$

Из теоремы следует ещё один из способов получения многочлена Жегалкина.

Следствие. Коэффициенты многочлена Жегалкина

$$a_0=f(0,0,...,0);$$

$$a_i=\frac{\partial f}{\partial X_i}(0,0,...,0),\ \ i=1,...,n;$$

$$a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\partial X_j}(0,0,...,0),\ \ i,j=1,...,n\ \ (i\neq j);$$

$$\vdots$$

$$a_{12...n}=\frac{\partial^n f}{\partial X_1...\partial X_n}(0,0,...,0).$$

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(X_1,X_2,X_3)=X_1\sim(X_2\to X_3)=X_1\sim(\overline{X_2}\vee X_3).$$

Найдем ее многочлен Жегалкина.

$$P(X_1,X_2,X_3)=f(0,0,0)\oplus\frac{\partial f}{\partial X_1}(0,0,0)\wedge X_1\oplus\frac{\partial f}{\partial X_2}(0,0,0)\wedge X_2\oplus$$

$$\oplus\frac{\partial f}{\partial X_3}(0,0,0)\wedge X_3\oplus\frac{\partial^2 f}{\partial X_1\partial X_2}(0,0,0)\wedge X_1\wedge X_2\oplus$$

$$\oplus\frac{\partial^2 f}{\partial X_2\partial X_3}(0,0,0)\wedge X_2\wedge X_3\oplus\frac{\partial^2 f}{\partial X_1\partial X_3}(0,0,0)\wedge X_1\wedge X_3\oplus$$

$$\oplus\frac{\partial^3 f}{\partial X_1\partial X_2\partial X_3}(0,0,0)\wedge X_1\wedge X_2\wedge X_3;$$

$$f(0,0,0)=0\sim(\overline{0}\vee 0)=0\sim(1\vee 0)=0\sim 1=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = \left(1 \sim \left(\overline{X_2} \vee X_3\right)\right) \oplus \left(0 \sim \left(\overline{X_2} \vee X_3\right)\right) = \left[1 \wedge \left(\overline{X_2} \vee X_3\right)\right] \vee \left[0 \wedge \left(\overline{\overline{X_2} \vee X_3}\right)\right] \oplus$$
$$\oplus \left[0 \wedge \left(\overline{X_2} \vee X_3\right)\right] \oplus \left[1 \wedge \left(\overline{\overline{X_2} \vee X_3}\right)\right] = \overline{X_2} \vee X_3 \oplus X_2 \wedge \overline{X_3};$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} = \left(X_1 \sim \left(1 \vee X_3\right)\right) \oplus \left(X_1 \sim \left(0 \vee X_3\right)\right) = \left(X_1 \sim 1\right) \oplus \left(X_1 \sim X_3\right) =$$
$$= \left(X_1 \wedge 1\right) \vee \left(\overline{X_1} \wedge 0\right) \oplus \left(X_1 \sim X_3\right) = X_1 \oplus \left(X_1 \sim X_3\right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_3} = \left(X_1 \sim \left(\overline{X_2} \vee 1\right)\right) \oplus \left(X_1 \sim \left(\overline{X_2} \vee 0\right)\right) = \left(X_1 \sim 1\right) \oplus \left(X_1 \sim \overline{X_2}\right) =$$
$$= X_1 \oplus \left(X_1 \sim \overline{X_2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\overline{X_2} \vee X_3 \oplus X_2 \wedge \overline{X_3}\right) = \left(0 \vee X_3 \oplus \overline{X_3}\right) \oplus \left(1 \vee X_3 \oplus \overline{X_3} \wedge 0\right) =$$
$$= \left(X_3 \oplus \overline{X_3}\right) \oplus 1 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_3}\left(\overline{X_2} \vee X_3 \oplus X_2 \wedge \overline{X_3}\right) = \left(\overline{X_2} \vee 1 \oplus X_2 \wedge \overline{X_3}\right) = \left(\overline{X_2} \vee 1 \oplus X_2 \wedge 0\right) \oplus$$
$$\oplus \left(\overline{X_2} \vee 0 \oplus X_2 \wedge 1\right) = 1 \oplus 0 \oplus \overline{X_2} \oplus X_2 = 1 \oplus 1 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_2}\left(X_1 \oplus \left(X_1 \sim \overline{X_2}\right)\right) = X_1 \oplus \left(X_1 \sim 0\right) \oplus X_1 \oplus \left(X_1 \sim 1\right) =$$
$$= \left(X_1 \wedge 0\right) \vee \left(\overline{X_1} \wedge 1\right) \oplus \left(X_1 \wedge 1\right) \vee \left(\overline{X_1} \wedge 0\right) = \overline{X_1} \oplus 1;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial X_1 \partial X_2 \partial X_3} = 0;$$

$$P\left(X_1, X_2, X_3\right) = 0 \oplus \left(\overline{X_2} \vee X_3 \oplus X_2 \wedge \overline{X_3}\right)(0,0,0) \wedge X_1 \oplus X_1 \oplus$$
$$\oplus \left(X_1 \sim X_3\right)(0,0,0) \wedge X_2 \oplus \left(X_1 \sim \overline{X_2}\right)(0,0,0) \wedge X_3 \oplus 0 \oplus 1 \wedge X_2 \wedge X_3 =$$
$$= \left(1 \vee 0 \oplus 0 \wedge 1\right) \wedge X_1 \oplus \left(0 \oplus \left(0 \sim 0\right)\right) \wedge X_2 \oplus \left(0 \oplus \left(0 \sim 1\right)\right) \wedge X_3 \oplus X_2 \wedge X_3 =$$
$$= 1 \wedge X_1 \oplus 1 \wedge X_2 \oplus 0 \wedge X_3 \oplus X_2 \wedge X_3 = X_1 \oplus X_2 \oplus X_2 \wedge X_3.$$

Для проверки составим таблицы истинности исходной функции и найденного многочлена Жегалкина (табл. 22).

Таблица 22

Сравнение таблиц истинности функции и многочлена Жегалкина

X_1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$\overline{X_2}$	1	1	0	0	1	1	0	0
$\overline{X_2} \vee X_3$	1	1	0	1	1	1	0	1
$X_1 \sim \left(\overline{X_2} \vee X_3\right)$	0	0	1	0	1	1	0	1
$X_1 \oplus X_2$	0	0	1	1	1	1	0	0
$X_2 \wedge X_3$	0	0	0	1	0	0	0	1
$X_1 \oplus X_2 \oplus X_2 \wedge X_3$	0	0	1	0	1	1	0	1

Таблицы истинности исходной функции и ее многочлена Жегалкина совпадают, следовательно многочлен Жегалкина найден верно.

Для получения разложения булевой функции в ряд, аналогичный ряду Тейлора в точке $(\delta_1,...,\delta_n)$, введём новые координаты $X'_1,...,X'_n$, где $X'_i = X_i \oplus \delta_i$, $i = 1,...,n$. Тогда точка $(\delta_1,...,\delta_n)$ в координатах $X_1,...,X_n$ будет соответствовать точке (0, 0,…,0) в координатах $X'_1,...,X'_n$.

Используя разложение булевой функции в точке (0, 0,…,0) в координатах $X'_1,...,X'_n$ и заменяя каждую переменную X'_i на $X_i \oplus \delta_i$, $i = 1,...,n$, получаем теорему о разложении булевой функции в точке $(\delta_1,...,\delta_n)$.

Теорема 27. Любая булева функция $f(X_1,...,X_n)$ определяется своим значением в точке $(\delta_1,...,\delta_n)$ и значениями своих производных в этой точке в виде

$$f(X_1,...,X_n)=f(\delta_1,...,\delta_n)\oplus\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_i}(\delta_1...\delta_n)\wedge(X_i\oplus\delta_i)\oplus$$

$$\oplus\sum_{\substack{i,j=1;\\ i\neq j.}}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\partial X_j}(\delta_1...\delta_n)\wedge(X_i\oplus\delta_i)\wedge(X_j\oplus\delta_j)\oplus...\oplus$$

$$\oplus\frac{\partial^n f}{\partial X_1...\partial X_n}(\delta_1...\delta_n)\wedge(X_1\oplus\delta_n)\wedge...\wedge(X_n\oplus\delta_n).$$

Пример. Найдём разложение булевой функции

$$f(X_1,X_2,X_3)=X_1\sim(X_2\to X_3)=X_1\sim(\overline{X_2}\vee X_3)$$

в точке (1, 0, 1).

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}(1,0,1)=(\overline{X_2}\vee X_3\oplus X_2\wedge\overline{X_3})(1,0,1)=1\vee1\oplus0\wedge0=1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2}(1,0,1)=(X_1\oplus(X_1\sim X_3))(1,0,1)=1\oplus(1\sim1)=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_3}(1,0,1)=(X_1\oplus(X_1\sim\overline{X_2}))(1,0,1)=1\oplus(1\sim1)=0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_1\partial X_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial X_1\partial X_3}=0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_2\partial X_3}=1;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial X_1\partial X_2\partial X_3}=0;$$

$$f(1,0,1)=1\sim(1\vee1)=1\sim1=1.$$

Получим многочлен Жегалкина:

$$f(X_1,X_2,X_3)=1\oplus1\wedge(X_1\oplus1)\oplus0\wedge(X_2\oplus0)\oplus0\wedge(X_3\oplus1)\oplus$$
$$\oplus1\wedge(X_3\oplus1)\wedge(X_2\oplus0)=1\oplus X_1\oplus1\oplus(X_3\oplus1)\wedge X_2=$$
$$=1\oplus X_1\oplus1\oplus X_3\wedge X_2\oplus X_2=X_1\oplus X_2\oplus X_2\wedge X_3.$$

Найденный многочлен Жегалкина является разложением булевой функции в точке (1, 0, 1).

6.3. Минимизация булевых функций

Минимизацией называют преобразование заданной булевой функции с целью уменьшения общего числа переменных и операций.

Процесс минимизации имеет важное значение при технической реализации дискретных устройств, так как при этом уменьшается общее количество элементов, увеличивается надежность и устройства становятся боле экономичными.

Минимизация может быть выполнена двумя методами: непосредственным и формальным. Непосредственный метод основан на применении законов алгебры логики к заданной булевой функции. Причем функция может быть задана в ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ.

Пример. Пусть задана булева функция 3-х переменных $f(x, y, z)$ в форме СДНФ:

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz.$$

Для минимизации заданной функции применим закон расщепления $xy \vee x\bar{y} = x$ к конъюнктивным членам, которые отличаются друг от друга одной переменной (1-2), (4-5), (3-6). Получим

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} \vee yz \vee x\bar{z}.$$

6.3.1. Минимизация булевых функций методом Карно

Среди формальных методов большое распространение получили методы Карно и Квайна-Мак-Класски. Метод Карно основан на представлении исходной функции, заданной в форме СДНФ, СКНФ или в виде таблицы истинности.

Карты Карно для булевых функций, представленных в виде СДНФ и СКНФ, приведены соответственно на рис. 74-75.

$\frac{xy}{z}$	00	01	11	10
0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$
1	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	xyz	$x\bar{y}z$

Рис. 74. Карта Карно для функции в форме СДНФ

$\frac{xy}{z}$	00	01	11	10
0	$x \vee y \vee z$	$x \vee \bar{y} \vee z$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$	$\bar{x} \vee y \vee z$
1	$x \vee y \vee \bar{z}$	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$

Рис. 75. Карта Карно для функции в форме СКНФ

Правильной конфигурацией будем называть прямоугольник на карте Карно (горизонтальный, вертикальный, квадрат), имеющий площадь $2^{n-i}, i = 0,...,n$, где n – число переменных в функции, и состоящий только из единиц или только из нулей.

В правильной конфигурации возможно объединение крайних полей, расположенных на противоположных сторонах карты.

С использованием правильных конфигураций накрывают карту Карно так, чтобы число правильных конфигураций было минимально, а площадь каждой конфигурации – максимальна.

При объединении полей, в которых стоят единицы, булева функция записывается в ДНФ значений переменных, не меняющихся в пределах правильной конфигурации.

При объединении полей, в которых стоят нули, булева функция записывается в КНФ инверсных значений переменных, не меняющихся в пределах правильной конфигурации.

Пример. Пусть задана функция 3-х переменных:

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z .$$

Представим ее с помощью карты Карно и найдем минимальную форму функции в виде ДНФ и КНФ. Объединения полей, в которых стоят единицы и нули, представлены соответственно на рис. 76-77.

$\frac{xy}{z}$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1

Рис. 76. Объединение полей из единиц

$\frac{xy}{z}$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1

Рис. 77. Объединение полей из нулей

Минимальная форма заданной функции в виде ДНФ примет следующий вид: $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{z} \vee x\bar{y}$; в виде КНФ: $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{z})$.

Пример. На рис. 78-80 приведем ряд примеров, поясняющих процесс минимизации методом Карно булевых функций 3-х переменных, а на рис. 81 – функции 4-х переменных. В примере 2 на рис. 79 показано, что может быть получено несколько минимальных форм.

$\frac{xy}{z}$	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$\bar{x}\bar{y} \vee z$

$\frac{xy}{z}$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

$y \vee z$

Рис. 78. Пример 1 минимизации функции 3-х переменных

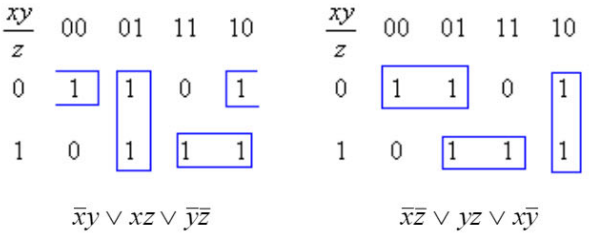


Рис. 79. Пример 2 минимизации функции 3-х переменных

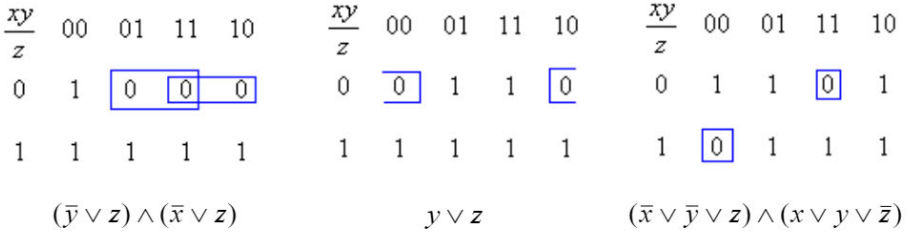


Рис. 80. Пример 3 минимизации функции 3-х переменных

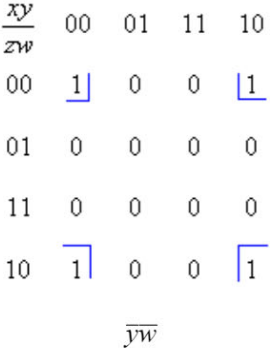


Рис. 81. Пример минимизации функции 4-х переменных

Методом Карно возможна минимизация функций 5 переменных. Карта в этом случае имеет 32 поля. Метод Карно целесообразно применять для функций, имеющих не более 5 переменных. При большом количестве переменных используют формальный метод Квайна-Мак-Класки.

6.3.2. Метод Квайна-Мак-Класски

Метод Квайна-Мак-Класки основан на задании элементарных конъюнкций в СДНФ в виде двоичных чисел.

Пример. Пусть задана булева функция 3-х переменных $f(x, y, z)$ в форме СДНФ:

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz.$$

Каждая элементарная конъюнкция может быть представлена двоичным числом:

$$f(x, y, z) = 000 \vee 001 \vee 011 \vee 100 \vee 110 \vee 111.$$

Данные двоичные числа называются номерами соответствующих конъюнкций. Кроме номера, каждой конъюнкции присваивается определенный индекс, под которым понимается число единиц в двоичном представлении конъюнкции.

Пример. Набор $\bar{x}\bar{y}z$, номер 001(1), индекс 1; набор $xy\bar{z}$, номер 110(6), индекс 2.

Алгоритм Квайна-Мак-Класски

Для того чтобы два числа m и n являлись номерами двух склеивающихся между собой конъюнкций, необходимо и достаточно, чтобы:

1) индексы данных чисел отличались на единицу;

2) сами числа отличались на степень числа два ($2^i, i = 0,...$);

3) число с большим индексом было больше числа с меньшим индексом.

Пример. Реализацию алгоритма рассмотрим на примере.

$$f = \bar{a}\bar{b}\bar{c}d \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee a\bar{b}\bar{c}d \vee \bar{a}bcd \vee a\bar{b}cd \vee \bar{a}\bar{b}cd.$$

На первом этапе минимизации определяем номера и индексы каждой конъюнкции, записывая функцию в виде

$$f = 0001 \vee 0101 \vee 1001 \vee 0111 \vee 1011 \vee 0011$$

$$1(\text{I}) \quad 5(\text{II}) \quad 9(\text{II}) \quad 7(\text{III}) \quad 11(\text{III}) \quad 3(\text{II})$$

Группируем конъюнкции, располагая их в порядке возрастания индексов и записывая в табл. 23.

Таблица 23

Пример применения алгоритма Квайна-Мак-Класски

Индекс	Номер	Результат	
I	0001(1)	00-1 0-01 -001	0- -1 -0-1
II	0011(3) 0101(5) 1001(9)	0-11 -011	
III	0111(7) 1011(11)	01-1 10-1	

На следующем этапе производим склеивание различных наборов, руководствуясь приведенной выше формулировкой алгоритма. При склеивании не совпадающие в числах разряды отмечаются прочерками. Например, склеивание чисел 0001 и 0011 дает число 00-1.

Результат склеивания выписывается в следующий столбец таблицы, также разделяемый на строки с индексами, отличающимися на единицу. После склеивания всех групп первого столбца таблицы переходят ко второму столбцу, вписывая результат склеивания в третий столбец.

При объединении наборов второго и последующих столбцов таблицы можно склевать только числа, содержащие прочерки в одноименных разрядах. Склеивание продолжается до тех пор, пока образование нового столбца станет невозможным.

По окончании склеивания приступают к построению таблицы конъюнкций, записывая в нее в качестве простых конъюнкций наборы, содержащиеся в последнем столбце предыдущей таблицы. В качестве простых конъюнкций в таблицу конъюнкций (табл. 24) также вписываются наборы из других столбцов табл. 23, не принимавшие участия в склеивании.

Если конъюнкция, содержащаяся в i-й строке табл. 24, составляет некоторую часть i-го столбца, на пересечении i-й строки и i-го столбца ставится символ *. С целью получения минимальной формы булевой функции из табл. 24 необходимо выбрать минимальное число строк так, чтобы для каждого столбца среди выбранных строк нашлась хотя бы одна, содержащая в этом столбце символ *.

Таблица 24

Таблица конъюнкций

Конъюнкция исходной функции / Результат	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	$\bar{a}b\bar{c}d$	$a\bar{b}\bar{c}d$	$\bar{a}bcd$	$a\bar{b}cd$	$\bar{a}\bar{b}cd$
$\bar{a}d$	*	*		*		*
$\bar{b}d$	*		*		*	*

Полученная после минимизации функция записывается в следующем виде: $f = \bar{a}d \vee \bar{b}d$.

7. Конечные автоматы

7.1. Пример конечного автомата

Многие реальные устройства и процессы могут быть описаны дискретными моделями, наряду с непрерывными.

Характерной особенностью дискретных моделей является дискретность времени, в котором происходит функционирование. При этом выделяются некоторые моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ реального времени, в которые рассматривается состояние реального устройства или процесса. Предполагается, что последовательность состояний устройства и внешних воздействий на него в моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots$ достаточно полно описывает поведение устройства.

Выбор моментов τ_i может происходить из различных соображений. Либо это последовательность с постоянным шагом $\Delta\tau$, $\tau_i = \tau_1 + \Delta\tau(i-1)$, $i = 1, 2, \ldots$;

либо последовательность моментов τ_i соответствует появлению некоторых внешних событий и тогда интервалы между последовательными моментами могут быть различными. При описании дискретной модели существенными являются не сами значения τ_i, а лишь номера 1, 2, … этих моментов.

Пример. Рассмотрим модель телефонного аппарата, способного запоминать некоторый номер и посылать в телефонную сеть соответствующую этому номеру последовательность импульсов при нажатии специальной кнопки. Ограничимся процессом вызова абонента.

Состояние аппарата в каждый момент времени τ определяется двумя независимыми событиями:

1) помнит ли аппарат какой-либо номер, и если помнит, то какой именно;

2) лежит ли трубка на аппарате или снята с него.

Это состояние может быть обозначено парой (N, α), где N – номер, хранимый в памяти аппарата (если номер не хранится, то $\mathrm{N} = 0$); $\alpha = 1$, если трубка лежит на аппарате; $\alpha = 0$ – иначе.

Для простоты будем считать, что телефонные номера – натуральные числа от 1 до n. Тогда состояниями модели будут возможные пары вида (N, α), где $\mathrm{N} \in \{0, ..., n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$.

Внешние воздействия на аппарат разделим на следующие типы:

1) снятие либо опускание трубки;

2) нажатие кнопки набора номера, хранимого в памяти;

3) набор посредством номеронабирателя некоторого номера $\mathrm{N} \in \{0, ..., n\}$;

4) нажатие кнопки, стирающей из памяти аппарата информацию о телефонном номере;

5) отсутствие внешних воздействий.

Для перечисленных внешних воздействий введем обозначения:

T_0 – трубка снимается;

T_1 – трубка опускается;

K – кнопка набора номера N;

$\mathrm{N} \in \{0, ..., n\}$ – набор телефонного номера N;

C – нажата кнопка стирания информации;

L – нет внешних воздействий.

Считаем, что в каждый из моментов времени τ_i наблюдается ровно одно из перечисленных воздействий, относящихся к интервалу $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots$.

В качестве воздействий телефонного аппарата на внешнюю среду рассматриваем последовательности импульсов, поступающие в телефонную сеть при наборе номера. Эти воздействия обозначаем $0, 1, \ldots, n$ – последовательности импульсов, соответствующих телефонным номерам $1, \ldots, n$ (0 – нет воздействий).

Перейдем к описанию функционирования модели. Предположим, что в некоторый момент времени t, $t = 1, 2, \ldots$ (здесь t – номер момента τ_t) модель имеет состояние (N, α), причем внешнее воздействие на модель (будем называть такие воздействия входными сигналами модели) в тот же момент времени есть V, $V \in \{T_0, T_1, K, 1, 2, ..., n, C, L\}$.

Для описания, в каком состоянии модель окажется к $t+1$-му моменту времени рассмотрим следующие случаи:

1) $V = T_0$. Если $\alpha = 1$, то модель переходит в состояние $(\mathrm{N}, 0)$. Если же $\alpha = 0$, то полагаем, что состояние модели не изменяется.

2) $V = T_1$. Если $\alpha = 0$, то состояние модели становится $(\mathrm{N}, 1)$, иначе состояние не изменяется.

3) $V = K$. В этом случае номер, хранимый в памяти аппарата, остается записанным в ней, так что состояние модели не изменяется к следующему моменту времени.

4) $V = i$, $i = \{1, ..., n\}$. Если $\mathrm{N} = 0, \alpha = 0$, то к моменту $t+1$ номер i оказывается записанным в памяти и новое состояние модели есть $(i, 0)$. Если $\mathrm{N} = 0, \alpha = 1$ или $\mathrm{N} \neq 0$, то ничего не изменяется.

5) $V = C$. В этом случае аппарат забывает номер N, модель переходит в состояние $(0, \alpha)$.

6) $V = L$. Состояние не изменяется.

Аналогичным образом определим воздействие W модели на внешнюю среду в момент времени t (будем называть такие воздействия выходными сигналами модели). Появление выходного сигнала наблюдается в промежутке между моментами τ_t и τ_{t+1} реального времени и связывается в модели с моментом t дискретного времени.

Перечислим выходные сигналы в момент времени t:

1) $V \in \{T_0, T_1, C, L\}$. В этих случаях последовательность символов, соответствующая номеру абонента, в телефонную сеть не посылается, так что полагаем $W = 0$.

2) $V = K$. Пусть сначала $\alpha = 0$. В этом случае происходит посылка импульсов, соответствующих номеру N при $\mathrm{N} \neq 0$, и наблюдается отсутствие импульсов при $\mathrm{N} = 0$. Поэтому полагаем $W = \mathrm{N}$. Если же $\alpha = 1$, то импульсы отсутствуют и $W = 0$.

3) $V = i, \quad i \in \{1, ..., n\}$. Как и в предыдущем случае, при $\alpha = 1$ $W = 0$, при $\alpha = 0$ $W = i$.

На этом описание модели завершается. Приведенное описание модели можно сделать более наглядным, если построить диаграмму Мура (граф), на которой указать переходы модели из одного состояния в другое под действием различных входных сигналов. Для простоты рассмотрим случай $n = 2$ и построим диаграмму Мура для полученного конечного автомата (рис. 82).

Каждому состоянию (N, α) здесь соответствует кружок, внутри которого изображена пара (N, α). Если модель под действием входного сигнала V переходит к следующему моменту времени в состояние (N', α'), причем выходной сигнал есть W, то (N, α) проводится к (N', α'). Этой дуге приписывается пара (V, W).

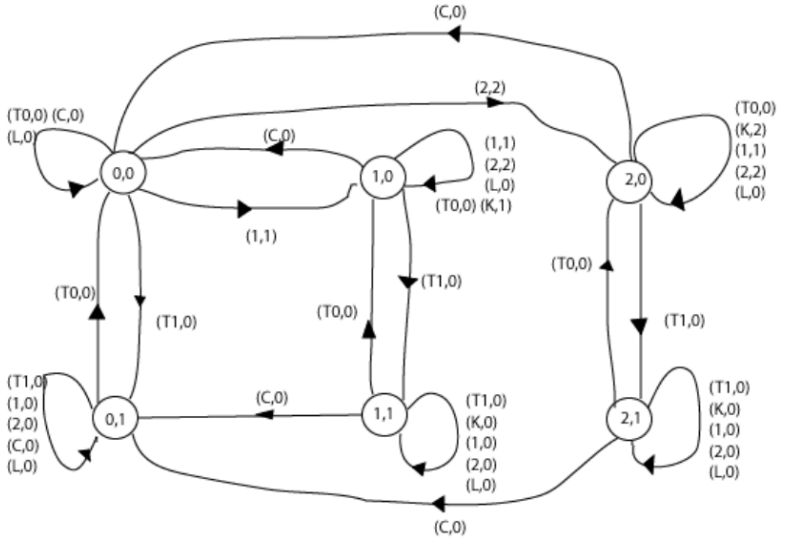


Рис. 82. Диаграмма Мура для рассматриваемого примера

7.2. Понятие конечного автомата

Модель конечного автомата может быть описана следующим образом. Конечный автомат имеет:

1) конечное множество $X = \{x_1,...,x_n\}$ внутренних состояний;

2) конечное множество $V = \{v_1,...,v_m\}$ входных сигналов;

3) конечное множество $Y = \{y_1,...,y_l\}$ выходных сигналов.

Элементы множеств V, Y называются соответственно входными и выходными символами модели, элементы множества X – символами состояний.

Время, в котором «работает» модель, предполагается дискретным. Последовательные моменты времени обозначаются своими номерами 1, 2, …

Если известны состояния $x(t-1)$ в момент времени $(t-1)$, а также входной сигнал $v(t)$, поступивший извне (или поступивший на вход модели) в момент t, то однозначно определяются состояние $x(t)$ в момент t и выходной сигнал $y(t)$, появившийся на выходе модели в момент времени t.

Другими словами, существуют такие функции φ и ψ, что

$$x(t) = \varphi(x(t-1), v(t));$$
$$y(t) = \psi(x(t), v(t)).$$

Таким образом, чтобы прослеживать изменения, происходящие в модели под воздействием входного сигнала, нужно знать $V, X, Y, \varphi, \psi, x(0)$, где $x(0) = x_0$ – начальное состояние.

Схематически модель конечного автомата изображена на рис. 83.

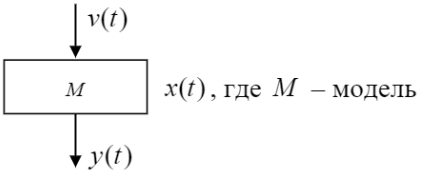


Рис. 83. Модель конечного автомата

Если входные воздействия поступают на рассматриваемое устройство по нескольким различным каналам и информация на выходе устройства считывается также по нескольким каналам, то входной и выходной алфавиты V, Y в модели M удобно представить в виде декартова произведения нескольких алфавитов, соответствующих каждый одному из указанных каналов: $V = V_1 \times ... \times V_m, Y = Y_1 \times ... \times Y_l$. Модель также может иметь и несколько состояний, тогда $X = X_1 \times ... \times X_n$.

Итак, конечным автоматом называется набор $A = (V, X, Y, \varphi, \psi, x_0)$, где

1) X, V, Y – конечные множества состояний, входов и выходов соответственно;

2) φ – функция переходов, определенная на множестве $X \times V$ и принимающая значение из X $(\varphi : X \times V \to X)$;

3) ψ – функция выходов, определенная на множестве $X \times V$ и принимающая значение из Y;

4) x_0 – начальное состояние.

Множества X, V, Y называются алфавитом состояний, входным и выходным алфавитами автомата A.

В общем случае, когда функция ψ зависит от входов и состояний, конечный автомат называется автоматом Мили, а когда функция ψ явно не зависит от входов, то конечный автомат называется автоматом Мура.

Если входным и выходным, а также алфавитом состояний конечного автомата являются декартовы произведения: $V_1 \times ... \times V_m$, $X_1 \times ... \times X_n$, $Y_1 \times ... \times Y_l$, то функции переходов и выходов автомата становятся вектор-функциями:

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1(v_1,...,v_m,x_1,...,x_n),...,\varphi_n(v_1,...,v_m,x_1,...,x_n)),$$
$$\vec{\psi} = (\psi_1(v_1,...,v_m,x_1,...,x_n),...,\psi_l(v_1,...,v_m,x_1,...,x_n)).$$

В этом случае говорят, что конечный автомат имеет m входов, l выходов и n состояний.

Алфавиты $V_1,...,V_m$ и $Y_1,...,Y_l$ называют соответственно входными и выходными алфавитами конечного автомата, а алфавиты $X_1,...,X_n$ – алфавитами состояний.

7.3. Способы задания конечного автомата

Существует несколько способов задания конечного автомата.

1. Конечные множества X, V, Y можно задать непосредственным перечислением их элементов, функции φ, ψ – при помощи прямоугольных таблиц с двумя входами (табл. 25).

Таблица 25

Таблицы переходов и выходов

V \ X	x_1	x_j	x_n
v_1		|	
v_i	———	$\varphi(x_j, v_i)$	
v_m			

V \ X	x_1	x_j	x_n
v_1		|	
v_i	———	$\psi(x_j, v_i)$	
v_m			

2. Другим способом задания конечного автомата являются диаграммы Мура. Пример такой диаграммы рассмотрен выше (см. рис. 82).

Для их построения на плоскости размещаются n вершин (в каждой записано соответствующее состояние конечного автомата). Далее рассматриваются всевозможные пары $(x_i, v_j), x_i \in X, v_j \in V$. Для каждой такой пары от вершины x_i проводится стрелка к вершине, в которой записан символ $\varphi(x_i, v_j)$. Этой стрелке приписывается пара $(v_j, \psi(x_i, v_j))$.

Заметим, что из каждой вершины диаграммы выходит ровно m стрелок. В случае, когда функция ψ зависит от второй переменной фиктивным образом (конечный автомат Мура), вторые элементы пар, приписанных стрелкам, выходящим из одной и той же вершины диаграммы Мура, одинаковы. Поэтому можно приписывать стрелкам только первые элементы указанных пар, а второй элемент (символ алфавита Y) записывать внутри круга, из которого выходят стрелки (рис. 84).

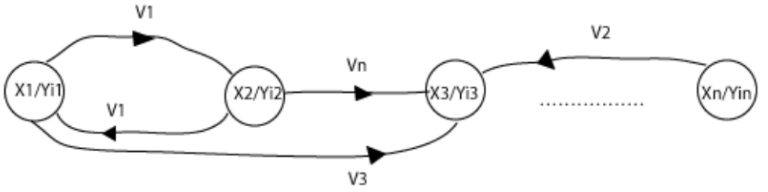


Рис. 84. Диаграмма Мура для конечного автомата Мура

3. Функции φ, ψ можно задать аналитически, т. е. формулами.

Пример. Предположим, что конечный автомат имеет 2 входа, 2 состояния, 3 выхода.

Входные алфавиты: $v_1=\{1, 2\}$; $v_2=\{2, 3\}$.

Алфавиты состояний: $x_1=\{a, b\}$; $x_2=\{1, 2, c\}$.

Выходные алфавиты: $y_1=\{1, 2, 3\}=y_2=y_3$.

Зададим конечный автомат Мили с помощью таблиц с двумя входами (табл. 26-27).

Таблица 26

Таблица переходов $x=\varphi(x,v)$ конечного автомата Мили

V \ X	a1	a2	ac	b1	b2	bc
12	a2	b2	bc	ac	a1	a2
13	ac	a2	b1	a1	bc	b2
22	bc	b2	bc	a2	bc	b2
23	bc	b1	ac	bc	b1	bc

Таблица 27

Таблица выходов $y = \psi(x, v)$ конечного автомата Мили

X / V	a1	a2	ac	b1	b2	bc
12	231	321	111	212	333	321
13	221	213	132	223	321	123
22	333	332	123	213	321	112
23	222	321	331	222	123	332

Конечный автомат Мура с теми же алфавитами задается одной таблицей (табл. 28).

Таблица 28

Таблица переходов $x = \varphi(x, v)$ и выходов $y = \psi(x)$ конечного автомата Мура

X / V	a1	a2	ac	b1	b2	bc
1,2	a2	b2	bc	ac	a1	a2
1,3	ac	a2	b1	a1	bc	b2
2,2	bc	b2	bc	a2	bc	b2
2,3	bc	b1	ac	bc	b1	bc
Y	123	231	331	213	123	333

Построим диаграммы Мура для конечных автоматов Мили (рис. 85) и Мура (рис. 86) из рассматриваемого примера.

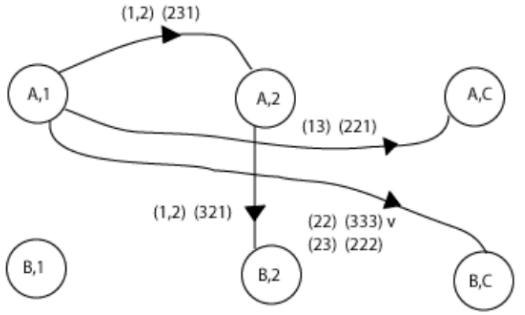


Рис. 85. Диаграмма Мура для конечного автомата Мили

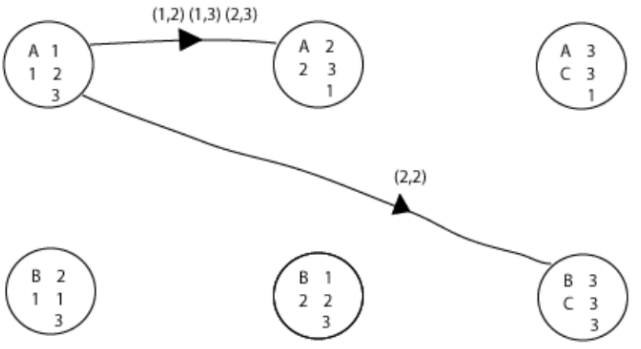


Рис. 86. Диаграмма Мура для конечного автомата Мура

Пример. Если конечный автомат – булев, т. е. входы, выходы и состояния принимают значения из множества $\{0, 1\}$, то функции φ, ψ можно задавать как обычные булевы функции от булевых переменных $x_1(t),...,x_n(t), v_1(t),...,v_m(t)$.

Пусть $n=2,\ m=3,\ l=1$. Тогда состояния двумерные, входы – трехмерные, выходы – одномерные.

Пусть $x(0)=x_0=(0,1)$.

Общий вид функций переходов:

$$x_1(t)=\varphi_1(x_1(t-1),x_2(t-1),v_1(t),v_2(t),v_3(t));$$

$$x_2(t)=\varphi_2(x_1(t-1),x_2(t-1),v_1(t),v_2(t),v_3(t)).$$

Общий вид функций выходов для конечного автомата Мили:

$$y_1(t) = \psi_1(x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t)).$$

Общий вид функций выходов для конечного автомата Мура:

$$y_1(t) = \psi_1(x_1(t), x_2(t)).$$

Пример. Зададим конкретный КА Мили:

$$x_1(t) = x_1(t-1) \wedge v_1(t) \to v_2(t);$$
$$x_2(t) = v_1(t) \sim x_2(t-1) \sim v_3(t);$$
$$y_1(t) = x_2(t) \to \overline{v_1(t)}.$$

7.4. Расширение функций переходов и выходов на множество входных слов

Пусть C – некоторое конечное множество. Если $\gamma = c(1)...c(n)$ – конечная последовательность символов алфавита C, то говорят, что γ есть слово в алфавите C. Число n назовем длиной слова γ и обозначим $|\gamma|$. Длина пустого слова равна 0. Множество всех слов в алфавите C обозначим C^*, множество всех слов длины l – C^l.

Входными словами автомата $A = (V, X, Y, \varphi, \psi)$ назовем произвольные конечные последовательности символов алфавита V. Для удобства рассмотрим пустое слово, не имеющее ни одного символа алфавита V, и обозначим его L.

Выходными словами алфавита назовем конечные последовательности символов алфавита Y, словами состояний – конечные последовательности символов алфавита X. В обоих случаях допускается и пустое слово L.

Для конечного автомата $A = (V, X, Y, \varphi, \psi)$ функции φ, ψ могут быть определены не только на множестве V всех входных букв, но и на множестве V^* всех входных слов. Для любого входного слова $\alpha = v_{1...}v_k$:

$$\varphi(x, v_1 v_2 ... v_k) = \varphi(\varphi(...(\varphi(x, v_1), v_2), ..., v_k)$$

или по индукции:

1) $\varphi(x, L) = x$;

2) $\varphi(x, \alpha v) = \varphi(\varphi(x, \alpha), v), x \in X, v \in V, \alpha \in V^*$.

Так же определяется и расширенная функция ψ:

1) $\psi(x, L) = L$;

2) $\psi(x, \alpha v) = \psi(\varphi(x, \alpha), v)$.

7.5. Автоматное отображение

Зафиксируем в конечном автомате S начальное состояние x_0 и каждому входному слову $\alpha = v_{i_1} ... v_{i_k}$ поставим в соответствие выходное слово w:

$$w = \psi(x_0, v_{i_1})\psi(x_0, v_{i_1} v_{i_2})...\psi(x_0, v_{i_1} v_{i_2} ... v_{i_k}).$$

Это отображение входных слов в выходные называется автоматным отображением, а также автоматным оператором, реализуемым конечным автоматом (S, x_0).

Если результатом применения оператора к слову α является выходное слово w, то это будем обозначать $S(\alpha) = w$ или $S(x_0, \alpha) = w$.

Автоматное отображение также можно определить индуктивно:

1) $S(x, v) = \psi(x, v)$;

2) $S(x, \alpha v) = S(x, \alpha)\psi(\varphi(x, \alpha), v)$.

Пример. Пусть X={A, B}, V={1, 2, 3}, Y={A, 1, 3}.

Таблично зададим функции переходов и выходов конечного автомата (табл. 29).

Таблица 29

Таблицы переходов $x = \varphi(x, v)$ и выходов $y = \psi(x, v)$

V \ X	A	B
1	B	A
2	B	B
3	B	A

V \ X	A	B
1	A	1
2	3	1
3	1	3

Найдем выходное слово $\psi(A,123)$ и автоматное отображение $S(B,1213)$.

$\varphi(A,2) = B$;

$$\varphi(A,123) = \varphi(\varphi(A,12),3) = \varphi(\varphi(\varphi(A,1),2)3) = A;$$

$$\psi(A,123) = \psi(\varphi(A,12),3) = \psi(\varphi(\varphi(A,1),2)3) = A.$$

$$S(B,1213) = S(B,121)\,\psi(\varphi(B,121),3) =$$

$$= S(B,12)\psi(\varphi(B,12),1)\psi(\varphi(B,121),3) =$$

$$= S(B,1)\psi(\varphi(B,1),2)\psi(\varphi(B,12),1)\psi(\varphi(B,121),3) =$$

$$= \psi(B,1)\psi(\varphi(B,1),2)\psi(\varphi(B,12),1)\psi(\varphi(B,121),3);$$

$$\psi(B,1) = 1;$$

$$\varphi(B,1) = A;$$

$$\psi(\varphi(B,1),2) = \psi(A,2) = 3;$$

$$\varphi(B,12) = \varphi(\varphi(B,1),2) = \varphi(A,2) = B;$$

$$\psi(\varphi(B,12),1) = \psi(B,1) = 1;$$

$$\varphi(B,121) = \varphi(\varphi(B,12),1) = \varphi(B,1) = A;$$

$$\psi(\varphi(B,121),3) = \psi(A,3) = 1;$$

$$S(B,1213) = 1311.$$

Следовательно: $\psi(A,123) = A,\ S(B,1213) = 1311.$

7.6. Изоморфизм и эквивалентность конечных автоматов

Пусть $S = (V_s, X_s, Y_s, \varphi_s, \psi_s)$ и $T = (V_t, X_t, Y_t, \varphi_t, \psi_t)$ – два конечных автомата. Тройка отображений $f: V_s \to V_t; g: X_s \to X_t; h: Y_s \to Y_t$ называется гомоморфизмом конечного автомата S в T, если $\forall v \in V_s,\ x \in X_s,\ y \in Y_s$ выполнены условия:

$$\varphi_T(g(x), f(v)) = g(\varphi_S(x,v));$$

$$\psi_T(g(x), f(v)) = h(\psi_S(x,v)).$$

Конечный автомат S в этом случае называется гомоморфным T. Если все три функции взаимнооднозначные, то они называются изоморфизмом S в T. Конечные автоматы, для которых существует изоморфизм, называются изоморфными. Ясно, что мощности соответствующих алфавитов должны быть одинаковыми.

Понятие изоморфизма имеет для конечных автоматов следующий смысл: S и T изоморфны, если входы, выходы и состояния S можно переименовать так, что таблица переходов и выходов конечного автомата S превращается в таблицу переходов и выходов T.

При гомоморфизме помимо переименования происходит еще и склеивание (например, нескольких состояний конечного автомата S в одно состояние T).

Пусть S и T – два конечных автомата с одинаковыми конечными алфавитами. Состояние x автомата S и состояние r автомата T называются эквивалентными, если для любого входного слова α выполняется равенство: $S(x,\alpha) = T(r,\alpha)$.

Два состояния автомата S x и r называются эквивалентными, если для любого входного слова α: $S(x,\alpha) = S(r,\alpha)$.

Два конечных автомата S и T называются эквивалентными, если для любого состояния x автомата S найдется неотличимое от него состояние r автомата T, и наоборот.

Эквивалентность конечных автоматов означает, что любое автоматное отображение, реализуемое одним из них, может быть реализовано другим, т. е. их возможности по реализации входной информации в выходную совпадают.

Можно поставить различные задачи о поиске автоматов, эквивалентных данному и обладающих заданными свойствами.

Наиболее изученной из таких задач является задача о минимизации числа состояний конечного автомата (или о минимизации конечного автомата): среди автоматов, эквивалентных S, найти автомат с наименьшим числом состояний, т. е. минимальный автомат.

Теорема 28. Для любого автомата S существует минимальный автомат S_0, единственный с точностью до изоморфизма. Если множество состояний автомата S разбивается на l классов

эквивалентности $l \le n$: $C_1 = \{x_{11},...,x_{li_1}\},...,C_l = \{x_{l1},...,x_{li_l}\}$, то S_0 имеет l состояний.

Доказательство: Если x_{j1} и x_{j2} – состояния из одного класса эквивалентности C_j, то для любой входной буквы v $\varphi_S(x_{j1},v)$ и $\varphi_S(x_{j2},v)$ также находятся в одном классе эквивалентности, например C_k. Докажем это.

Заметим, что $S(\varphi_S(x_j,v),\alpha) = \psi_S(\varphi_S(x_j,v),\alpha) = \psi_S(x_j,v\alpha) = S(x_j,v\alpha)$.

Тогда если $\varphi_S(x_{j1},v)$ и $\varphi_S(x_{j2},v)$ не эквивалентны, то найдется такое входное слово α, что $S(\varphi_S(x_j,v),\alpha) \ne S(\varphi_S(x_{j2},v),\alpha)$.

Следовательно: $S(x_{j1},v\alpha) \ne S(x_{j2},v\alpha)$ и x_{j1}, x_{j2} не эквивалентны, что противоречит предположению.

Учитывая это обстоятельство, определим автомат $S_0 = (V_s, X_{s_0}, Y_s, \varphi_{S_0}, \psi_{s_0})$ так:

1) $X_{s_0} = \{C_1,...,C_l\}$;

2) для любой входной буквы v и для любого C_i: $\varphi_{s_0}(C_i,v) = C_j$, где C_j – класс эквивалентности, содержащий состояние $\varphi_s(x_{ir},v)$ (x_{ir} – любое состояние из C_i);

3) $\psi_{s_0}(C_i,v) = \psi_s(x_{ir},v)$.

Докажем, что S_0 и S эквивалентны, то есть нужно доказать, что $\forall x \in X_S$ найдется эквивалентное ему состояние $C_i \in X_{S_0}$ или $\forall \alpha\ S(x,\alpha) = S_0(C_i,\alpha)$.

Доказывать будем индукцией по длине слова α. Возьмем произвольное состояние $x \in X_S$. Предположим, что $x \in C_i$.

Пусть сначала $|\alpha| = 1$, $\alpha = v$.

Тогда $S(x,v) = \psi_S(x,v)$;

$S_0(C_i,v) = \psi_{S_0}(C_i,v) = \psi_S(x,v) = S(x,v)$ (по п. 3 определения S_0).

Пусть теперь предположение выполняется для всех α, $|\alpha| < n$. Докажем, что оно выполняется и для $|\alpha| = n$.

Пусть $\alpha = \alpha' v$, $|\alpha'| = n-1$.

Тогда $S(x,\alpha) = S(x,\alpha' v) = S(x,\alpha')\psi_S(\varphi_S(x,\alpha'),v)$.

Пусть $\varphi_S(x,\alpha') = y$. Следовательно:

$\varphi_{S_0}(C_i,\alpha') = C_j$, где $y \in C_j$;

$\psi_S(\varphi_S(x,\alpha'),v) = \psi_S(y,v)$;

$S_0(C_i,\alpha) = S_0(C_i,\alpha' v) = S_0(C_i,\alpha')\psi_{S_0}(\varphi_{S_0}(C_i,\alpha'),v)$;

$\psi_{S_0}(\varphi_{S_0}(C_i,\alpha'),v) = \psi_{S_0}(C_j,v) = \psi_S(y,v)$ (по п. 3 определения S_0).

Заметим, что по предположению $S(x,\alpha') = S_0(C_i,\alpha')$.

Тогда $S(x,\alpha) = S(x,\alpha')\psi_S(y,v) = S_0(C_i,\alpha')\psi_{S_0}(C_i,v) = S_0(C_i,\alpha)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что по построению S_0 не имеет эквивалентных состояний. Остается показать, что S_0 минимален. Предположим, что S_0 не минимален и имеется эквивалентный ему автомат S_0'' с меньшим числом состояний. По определению эквивалентности для любого состояния S_0 найдется эквивалентное ему состояние S_0''. Поскольку в S_0'' меньше состояний, то какие-то два состояния S_0 эквивалентны одному состоянию S_0'' и в силу транзитивности окажутся эквивалентными между собой, что противоречит отсутствию в S_0 эквивалентных состояний. Поэтому S_0 минимален. ◁

7.7. Алгоритм Мили нахождения минимального конечного автомата

Чтобы воспользоваться теоремой для нахождения минимального автомата, нужно уметь находить классы эквивалентных состояний. Наиболее известным алгоритмом нахождения эквивалентных состояний является алгоритм Мили, который будет описан индуктивно.

Алгоритм Мили

Пусть дан автомат $S=(V,X,Y,\varphi,\psi,)$ с n состояниями. На каждом шаге алгоритма будем строить некоторое разбиение множества X на классы, причем разбиение на следующем шаге будет получаться расщеплением некоторых классов предыдущего разбиения.

1. Два состояния x и x' относим в один класс C_{1j} тогда и только тогда, когда $\forall v \in V \ \ \psi(x',v)=(x,v)$.

$i+1$. Два состояния x и x' из одного класса C_{ij} относим в один класс $C_{i+1,j}$ тогда и только тогда, когда $\forall v \in V \ \varphi(x,v)$, $\varphi(x',v)$ принадлежат одному и тому же классу C_{ij}. Если $(i+1)$-шаг не изменяет разбиения, то алгоритм заканчивается и получаемое разбиение является разбиением на классы эквивалентных состояний. Иначе применяем шаг $(i+1)$ к полученному разбиению.

Пример. Рассмотрим конечный автомат Мили, представленный в табл. 30. Найдем эквивалентный ему минимальный автомат.

Таблица 30

Таблицы переходов и выходов исходного автомата Мили

$\varphi(x,v)$

X \ V	V_1	V_2	V_3
1	2	4	4
2	1	1	5
3	1	6	5
4	8	1	1
5	6	4	3
6	8	9	6
7	6	1	3
8	4	4	7
9	7	9	7

$\psi(x,v)$

X \ V	V_1	V_2	V_3	
1	0	1	1	^
2	1	0	0	^^
3	1	0	0	^^
4	0	1	1	^
5	1	1	0	^^^
6	0	1	1	^
7	1	1	0	^^^
8	1	0	0	^^
9	0	1	1	^

В таблице выходов пометим одинаковым количеством символов «^» состояния, выходы которых совпадают для любого входа. Каждая группа состояний попадает в один класс на первом шаге. Выполнение алгоритма Мили для рассматриваемого автомата приведем в табл. 31.

Таблица 31

Шаги алгоритма Мили

№ шага	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
1	1,4,6,9	2,3,8	5,7	–	–	–
2	1,4,6	9	2,3,8	5,7	–	–
3	1,4	6	9	2,3,8	5,7	–
4	1,4	6	9	2,8	3	5,7

Таблица 32

Таблицы переходов и выходов минимального автомата Мили

$\varphi(x,v)$

X \ V	V_1	V_2	V_3
C_1	C_4	C_1	C_1
C_2	C_4	C_3	C_2
C_3	C_6	C_3	C_6
C_4	C_1	C_1	C_6
C_5	C_1	C_2	C_6
C_6	C_2	C_1	C_5

$\psi(x,v)$

X \ V	V_1	V_2	V_3
C_1	0	1	1
C_2	0	1	1
C_3	0	1	1
C_4	1	0	0
C_5	1	0	0
C_6	1	1	0

Минимальный автомат S_0 имеет 6 состояний $C_1,...,C_6$ и описывается таблицами переходов и выходов (табл. 32).

7.8. Частичные автоматы и их минимизация

7.8.1. Определение частичного автомата

Конечный автомат S называется частичным или не полностью определенным автоматом, если хотя бы одна из двух его функций не полностью определена, т. е. для некоторых пар (x, v) значения функций φ, ψ не определены.

В таблице неполная определенность конечного автомата выражается в том, что некоторые ее клетки не заполнены – в них стоят прочерки.

Переопределим для частичного конечного автомата функции $\varphi(x, \alpha)$, $\psi(x, \alpha)$ *и* $S(x, \alpha)$, где α – слово входного алфавита. При этом будем пользоваться знаком $\cong$. Запись $A \cong B$ означает, что A, B либо одновременно неопределенны, либо определенны и равны.

Функция $\varphi(x, \alpha)$:

1) $\varphi(x, v)$ задается таблицей;

2) $\varphi(x, \alpha v) \cong \varphi(\varphi(x, \alpha), v)$, если $\varphi(x, \alpha)$ определена;

3) $\varphi(x, \alpha v)$ не определена, если $\varphi(x, \alpha)$ не определена.

Функция $\psi(x, \alpha)$:

1) $\psi(x, \alpha v) \cong \psi(\varphi(x, \alpha), v)$, если $\varphi(x, \alpha)$ определена;

2) $\psi(x, \alpha v)$ не определена, если $\varphi(x, \alpha)$ не определена.

Функция $S(x, \alpha)$:

1) $S(x, v) \cong \psi(x, v)$;

2) $S(x, \alpha v) = S(x, \alpha)\, \psi(\varphi(x, \alpha), v)$, если определены $\varphi(x, \alpha)$ и $\psi(\varphi(x, \alpha), v)$;

3) $S(x, \alpha v) = S(x, \alpha) -$, если $\varphi(x, \alpha)$ определена, а $\psi(\varphi(x, \alpha), v)$ – не определена;

4) $S(x, \alpha v) = -$, то есть не определено, если $\varphi(x, \alpha)$ не определена.

Входное слово α, для которого $S(x, \alpha)$ определено, называется допустимым для состояния x.

7.8.2. Минимальный псевдоэквивалентный частичный конечный автомат

Состояние x автомата S и состояние r автомата T называются псевдоэквивалентными, если $\forall \alpha\ S(x,\alpha) \cong T(r,\alpha)$.

Состояния x и x' автомата S называются псевдоэквивалентными, если $\forall \alpha\ S(x,\alpha) \cong S(x',\alpha)$.

Автоматы S и T псевдоэквивалентны, если для любого состояния S найдется псевдоэквивалентное ему состояние T, и наоборот.

Если прочерк в функции φ рассмотреть как символ нового состояния, а в функции ψ – как новую выходную букву, то отношение $S(x,\alpha) \cong T(r,\alpha)$ переходит в обычное отношение равенства $S(x,\alpha) = T(r,\alpha)$. Следовательно, применение к частичному автомату S изложенного выше алгоритма Мили даст минимальный автомат, псевдоэквивалентный S.

Пример. Найдем состояние $\varphi(2,ABA)$, выход $\psi(1,ABC)$ и автоматное отображение $S(1,AAA)$ для частичного автомата Мили, приведенного в табл. 33.

Таблица 33

Таблицы переходов и выходов частичного автомата Мили

$\varphi(x,v)$

V \ X	1	2	3	4	5	6	7
A	3	2	–	–	3	4	5
B	1	7	4	6	6	–	1
C	2	–	3	4	5	7	2

$\psi(x,v)$

V \ X	1	2	3	4	5	6	7
A	–	1	1	0	–	1	–
B	0	1	1	1	0	1	0
C	1	0	0	–	1	0	1

$$\varphi(2,ABA) = \varphi(\underbrace{\varphi(\underbrace{\varphi(2,A)}_{2},B)}_{7},A) = 3;$$

$$\psi(1,ABC) = \psi(\underbrace{\varphi(\underbrace{\varphi(1,A)}_{3},B)}_{4},C) = -;$$

$$S(1, AAA) = S(1, AA)\,\psi(\underbrace{\varphi(\varphi(1, A), A)}_{3}, A) =$$

$$= S(1, A)\,\underbrace{\psi(\varphi(1, A), A)}_{3} - = S(1, A) - - = \underbrace{\psi(1, A)}_{3} - - = 3 - -.$$

Однако понятие псевдоэквивалентности не учитывает всех возможностей минимизации частичных автоматов. Далее рассмотрим алгоритм минимизации частичных автоматов.

7.8.3. Алгоритм Пола-Ангера минимизации частичных конечных автоматов

Состояние x автомата S покрывает состояние r автомата T (S и T могут совпадать), если $\forall\alpha$ из того, что $T(r, \alpha)$ определено следует, что $S(x, \alpha)$ определено и $S(x, \alpha) = T(r, \alpha)$.

Автомат S покрывает автомат T, если для любого состояния T найдется покрывающее его состояние из S.

В частности, состояние, столбец которого не содержит прочерков, покрывает все состояния, столбцы которых получаются из него заменой некоторых символов прочерками. И обратно, любое состояние x', полученное из состояния x некоторым доопределением, т. е. заменой прочерков символами, покрывает x.

Пример. Рассмотрим частичный автомат Мили, заданный табл. 34.

Таблица 34

Таблицы переходов и выходов частичного автомата Мили

$\varphi(x, v)$

V \ X	1	2	3
V_1	2	–	2
V_2	–	1	1
V_3	3	3	3

$\psi(x, v)$

V \ X	1	2	3
V_1	0	–	1
V_2	–	–	–
V_3	–	0	0

В примере состояние 3 покрывает 2. Автомат S' с двумя состояниями, полученный заменой 2 на 3, покрывает исходный автомат. Рассмотрим теперь состояния 1 и 2 исходного конечного автомата. В отличие от пары 2, 3, нельзя считать одно состояние сильнее другого. Однако можно получить состояние, которое покрывает 1 и 2. Таким состоянием является, например, состояние 4 (табл. 35), получаемое объединением состояний 1 и 2.

Таблица 35

Таблицы переходов и выходов нового состояния 4

$\varphi(x, v)$

V \ X	4
V_1	2
V_2	1
V_3	3

$\psi(x, v)$

V \ X	4
V_1	0
V_2	–
V_3	0

Состояние x автомата S и состояние r автомата T (S и T могут совпадать) называются совместимыми, если существует состояние p (может быть какого-то третьего автомата W), покрывающее и x и r.

Автоматы S и T совместимы, если существует автомат W, покрывающий S и T.

Назовем систему классов $C_1,...,C_l$ полной, если $C_1 \cup ... \cup C_l = X$, и замкнутой, если из того, что состояния x и x' находятся в одном классе C_i, следует, что состояния $\varphi(x,\alpha)$ и $\varphi(x',\alpha)$ находятся в одном классе C_j всякий раз, когда $\psi(x,\alpha)$ и $\psi(x',\alpha)$ определены. Рассмотрим теорему Пола-Ангера.

Теорема 29. Если для частичного конечного автомата S имеется полная и замкнутая система классов совместимости $C_1,...,C_l$, то существует автомат S', покрывающий S.

Доказательство: Автомат $S' = (V_S, X_{S'}, Y_S, \varphi_{S'}, \psi_{S'})$ определим так:

1) $X_{S'} = \{C_1, ..., C_l\}$;

2) $\forall v \in V_S \quad \varphi_{S'}(C_i, v) = C_j$, если $\forall x \in C_i \; \varphi_S(x, \alpha) \in C_j$ (классы C_j не могут быть разными для разных x ввиду замкнутости системы классов);

3) $\varphi_{S'}(C_i, v)$ не определено, если $\forall x \in C_i \; \varphi_S(x, v)$ не определено;

4) $\psi_{S'}(C_i, v) = y$, если $\forall x \in C_i \; \psi_S(x, v) = y$ (буквы y не могут быть разными для разных x ввиду совместимости состояний x из одного класса);

5) $\psi_{S'}(C_i, v)$ не определено, если $\forall x \in C_i \; \psi_S(x, v)$ не определено.

Докажем, что S' покрывает S, то есть нужно доказать, что $\forall x \in X_S$ найдется покрывающее его состояние $C_i \in X_{S'}$ или $\forall \alpha$ из того что $S(x, \alpha)$ определено следует, что и $S'(C_i, \alpha)$ определено, и $S(x, \alpha) = S'(C_i, \alpha)$.

Доказывать будем индукцией по длине слова α.

Возьмем произвольное состояние $x \in X_S$. Предположим, что $x \in C_i$.

Пусть сначала $|\alpha| = 1$, $\alpha = v$. И пусть $S(x, \alpha)$ определено.

Тогда $S(x, v) = \psi_S(x, v)$ определено;

$$S'(C_i, v) = \psi_{S'}(C_i, v) = \psi_S(x, v) = S(x, v) \text{ (по п. 4 определения } S').$$

Пусть теперь предположение выполняется для всех α, $|\alpha| < n$. Докажем, что оно выполняется и для $|\alpha| = n$.

Пусть $\alpha = \alpha' v$, $|\alpha'| = n - 1$. И пусть $S(x, \alpha)$ определено.

Тогда $S(x, \alpha) = S(x, \alpha' v) = S(x, \alpha') \psi_S(\varphi_S(x, \alpha'), v)$.

Заметим, что если $S(x, \alpha)$ определено, то определено и $\psi_S(\varphi_S(x, \alpha'), v)$, а также $\varphi_S(x, \alpha')$. Пусть $\varphi_S(x, \alpha') = y$. Тогда $\varphi_{S_0}(C_i, \alpha')$ определено (по п. 2 определения S') и равно $\varphi_{S_0}(C_i, \alpha') = C_j$, где $y \in C_j$.

Таким образом:

$$\psi_S(\varphi_S(x, \alpha'), v) = \psi_S(y, v);$$

$$S'(C_i, \alpha) = S'(C_i, \alpha' v) = S'(C_i, \alpha') \psi_{S'}(\varphi_{S'}(C_i, \alpha'), v).$$

Тогда $\psi_{S'}(\varphi_{S'}(C_i,\alpha'),v)$ определено (по п. 4 определения S') и $\psi_{S'}(\varphi_{S'}(C_i,\alpha'),v)=\psi_{S'}(C_j,v)=\psi_S(y,v)$ (по п. 4 определения S_0).

Заметим, что по предположению $S(x,\alpha')=S_0(C_i,\alpha')$ и определено, так как $S(x,\alpha')$ определено. Следовательно, $S(x,\alpha)$ определено и

$$S(x,\alpha)=S(x,\alpha')\psi_S(y,v)=S_0(C_i,\alpha')\psi_{S_0}(C_i,v)=S_0(C_i,\alpha),$$

что и требовалось доказать. ◁

Эта теорема является некоторым аналогом теоремы из п. 7.6. В случае, когда S полностью определен, обе теоремы совпадают.

Алгоритм Пола-Ангера

Шаг 1. Будем искать системы классов совместимости. Переберем все $n(n-1)/2$ пар состояний и посмотрим, совместимы ли они. Проверяется следующим образом.

1) Несовместимыми объявляются все пары x,x', для которых $\exists v:\psi(x,v)\neq\psi(x',v)$, если оба определены.

i+1) Несовместимыми объявляются все пары x,x', для которых $\exists v:\varphi(x,v)\quad\varphi(x',v)$ уже были несовместимы на предыдущих шагах.

Процесс останавливается, когда не появляются новые несовместимые пары. Все остальные пары являются совместимыми.

Шаг 2. Из полученных пар совместимых состояний нужно образовать максимальные классы совместимости, т. е. классы, в которые нельзя добавить ни одного состояния. Система всех максимальных классов является полной и замкнутой (для любой совместимой пары x,x' $\varphi(x,v)$ и $\varphi(x',v)$ тоже совместимы (по построению) и, следовательно, лежат в одном максимальном классе), поэтому ей соответствует автомат S', покрывающий исходный автомат S. Однако в общем случае он может иметь даже больше состояний, чем S.

Пример. Рассмотрим частичный конечный автомат Мили, представленный в табл. 36. Найдем покрывающий его автомат.

Таблица 36

Таблицы переходов и выходов исходного частичного автомата Мили

$\varphi(x,v)$

V \ X	1	2	3	4	5
V_1	2	2	1	1	1
V_2	1	2	3	3	4
V_3	3	2	2	3	2

$\psi(x,v)$

V \ X	1	2	3	4	5
V_1	0	–	–	1	1
V_2	1	1	–	0	–
V_3	0	0	0	0	0

Шаг 1. Найдем совместимые пары состояний x,x'. Процесс поиска отразим в табл. 37.

Таблица 37

Шаг 1 алгоритма Пола-Ангера

Пара x,x'	1	2	3
1,2	^	^	^
1,3	^	^	^
1,4	–	–	–
1,5	–	–	–
2,3	^	^	^
2,4	–	–	–
2,5	^	–	–
3,4	^	^	^
3,5	^	^	^
4,5	^	^	^

Шаг 2. Из полученных пар совместимых состояний образуем максимальные классы совместимости: $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{3, 4, 5\}$.

Таблица 38

Таблицы переходов и выходов покрывающего автомата Мили

$\varphi(x,v)$

V \ X	C_1	C_2
V_1	C_1	C_1
V_2	C_1	C_2
V_3	C_1	C_1

$\psi(x,v)$

V \ X	C_1	C_2
V_1	0	1
V_2	1	0
V_3	0	0

Покрывающий автомат S' имеет 2 состояния C_1, C_2 и описывается таблицами переходов и выходов (табл. 38).

7.9. Эквивалентность конечных автоматов Мили и Мура

Несмотря на то, что автомат Мура – частный случай автомата Мили, возможности этих двух видов автоматов совпадают.

Теорема 30. Для любого автомата Мили существует эквивалентный ему автомат Мура.

Доказательство: Пусть $S = (V, X, Y, \varphi, \psi)$ – конечный автомат Мили, где $V = \{v_1,...,v_m\}$, $X = \{x_1,...,x_n\}$. Определим автомат Мура S_M так:

1) $V_M = V$;

2) X_M содержит $mn + n$ состояний, причем mn состояний x_{ij} $(i = 1,...,n, j = 1,...,m)$ соответствуют парам (x_i, v_j) автомата S, n состояний – x_{i0} $(i = 1,...,n)$;

3) $\varphi_M(x_{i0}, v_k) = x_{ik}$; $\varphi_M(x_{ij}, v_k) = x_{lk}$, где l таково, что $\varphi(x_i, v_k) = x_l$ $(i = 1,...,n)$;

4) $\psi_M(x_{i0})$ не определено; $\psi_M(x_{ij}) = \psi(x_i, v_j)$ $(i = 1,...,n)$. ◁

Конечный автомат Мура, полученный по автомату Мили, назовем интерпретирующим конечным автоматом Мура для автомата Мили.

Пример. Рассмотрим конечный автомат Мили S, заданный табл. 39.

Таблица 39

Таблицы переходов и выходов автомата Мили *S*

$\varphi(x,v)$

V \ X	A	B	C
V_1	B	A	C
V_2	C	C	B

$\psi(x,v)$

V \ X	A	B	C
V_1	0	1	0
V_2	1	1	0

Для заданного автомата S:

$V = \{V_1, V_2\}$;

$X = \{A, B, C\}$;

$Y = \{0, 1\}$.

В интерпретирующем S автомате Мура S_M:

$V_M = V = \{V_1, V_2\}$;

$Y_M = Y = \{0, 1\}$;

$X_M = \{x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{12}, x_{22}, x_{32}\}$.

Функции переходов и выходов интерпретирующего автомата Мура S_M для автомата Мили S представлены в табл. 40.

Таблица 40

Таблицы переходов и выходов интерпретирующего автомата Мура S_M

V \ X	x_{10}	x_{20}	x_{30}	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{12}	x_{22}	x_{32}
V_1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{21}	x_{11}	x_{31}	x_{21}	x_{11}	x_{31}
V_2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{32}	x_{32}	x_{22}	x_{32}	x_{32}	x_{22}
Y	–	–	–	0	1	0	1	1	0

Теорема 31. Для любого конечного автомата Мура существует эквивалентный ему конечный автомат Мили.

Доказательство: Пусть задан конечный автомат Мура $S_M = (V_M, X_M, Y_M, \varphi_M, \psi)$. Определим автомат Мили так:

$$S = (V_M, X_M, Y_M, \varphi_M, \psi), \text{ где } \psi(x, v) = \psi_M(\varphi_M(x, v)). \triangleleft$$

Построенный таким образом конечный автомат Мили по автомату Мура назовем интерпретирующим конечным автоматом Мили для конечного автомата Мура.

7.10. Представление конечных автоматов матрицами соединений

Матрица соединений конечного автомата строится как квадратная матрица размера $n \times n$, строки и столбцы которой соответствуют различным состояниям конечного автомата, причем первый столбец и первая строка матрицы соответствуют начальному состоянию.

На пересечении x_i $(i = 1,...,n)$ строки и x_j $(j = 1,...,n)$ столбца следует расположить входное воздействие, вызывающее переход автомата из состояния x_i в x_j, а через дробь – выходное воздействие, которое появляется на выходе автомата. Если таких дробей несколько, они все перечисляются через запятую; если их нет, то ставится $\varnothing$.

Пример. Рассмотрим конечный автомат Мили, заданный табл. 41.

Таблица 41

Таблицы переходов и выходов автомата Мили

$\varphi(x, v)$

V \ X	1	2	3	4
V_1	2	4	4	1
V_2	3	1	3	2
V_3	1	2	3	2

$\psi(x, v)$

V \ X	1	2	3	4
V_1	A	B	C	A
V_2	C	B	A	B
V_3	C	C	A	B

Матрица соединений данного конечного автомата представлена в табл. 42.

Таблица 42

Матрица соединений конечного автомата Мили

	1	2	3	4
1	V_3/C	V_1/A	V_2/C	$\varnothing$
2	V_2/B	V_3/C	$\varnothing$	V_1/B
3	$\varnothing$	$\varnothing$	V_2/A, V_3/A	V_1/C
4	V_1/A	V_2/B, V_3/B	$\varnothing$	$\varnothing$

Характерным свойством матрицы соединений является то, что в любой ее строке каждое входное воздействие встречается не более одного раза. Это условие может служить для контроля при построении матрицы соединений.

Для конечного автомата Мура в каждом столбце матрицы соединений стоит один и тот же выход.

Пример. Рассмотрим конечный автомат Мура, заданный табл. 43.

Таблица 43

Таблицы переходов и выходов автомата Мура

X / V	00	01	10	11
A	11	00	01	11
B	00	11	10	10
C	01	11	11	10
Y	0	0	1	1

Матрица соединений данного конечного автомата представлена в табл. 44.

Таблица 44

Матрица соединений конечного автомата Мура

	00	01	10	11
00	$B/0$	$A/0$	$\varnothing$	$\varnothing$
01	$C/0$	$\varnothing$	$A/1$	$\varnothing$
10	$\varnothing$	$\varnothing$	$B/0$	$B/1,\ C/1$
11	$A/0$	$B/0,\ C/0$	$C/1$	$A/1$

Матрица соединений является матрицей смежности для графа (диаграммы Мура) конечного автомата.

7.11. Дерево конечного автомата

Дерево конечного автомата – ориентированное дерево, корнем которого является начальное состояние. Следующим уровнем являются все состояния, в которые может перейти конечный автомат из начального. На дугах подписываются входные и выходные сигналы.

Пример. Рассмотрим конечный автомат Мили, заданный табл. 41. Пусть начальное состояние $x_0 = 3$. Дерево конечного автомата приведено на рис. 87.

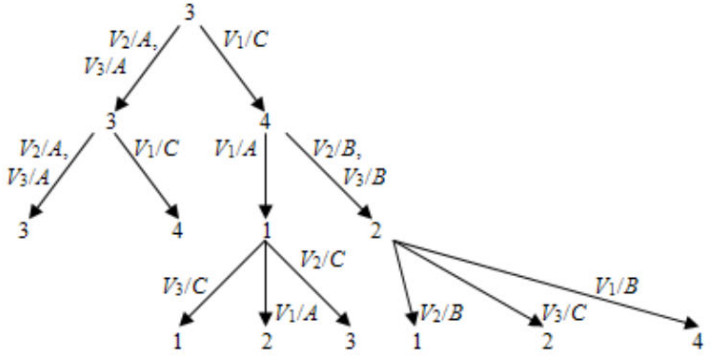


Рис. 87. Дерево конечного автомата

7.12. Построение схем из функциональных элементов для булевых конечных автоматов

Пусть $S = (V, X, Y, \varphi, \psi)$ – булев конечный автомат. Тогда функции φ, ψ – булевы функции, и их можно выразить через любую полную систему функций. Например, через $\{\vee, \wedge, \bar{}\}$ или $\{\oplus, \wedge, 1\}$.

Введем функциональный элемент «задержка», будем обозначать его на схеме значком: $\dashv$.

Пример. Рассмотрим булев конечный автомат, в котором $n = 2$, $m = 2$, $l = 3$. Пусть функции переходов и выходов, выраженные в полной системе $\{\vee, \wedge, \bar{}\}$, имеют вид

$$x_1(t) = \varphi_1(x_1(t-1), x_2(t-1), v_1(t), v_2(t)) = v_2(t) \wedge \overline{x_2}(t-1);$$

$$x_2(t) = \varphi_2(x_1(t-1), x_2(t-1), v_1(t), v_2(t)) = v_1(t) \vee \left(\overline{x_1}(t-1) \wedge x_2(t-1)\right);$$

$$y_1(t) = \psi_1(x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)) = \overline{x_2}(t);$$

$$y_2(t) = \psi_2(x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)) = x_1(t) \vee v_2(t);$$

$$y_3(t) = \psi_3(x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)) = v_1(t) \vee \left(v_2(t) \wedge \overline{x_2}(t)\right).$$

Схемы из функциональных элементов для данного конечного автомата изображены на рис. 88-89.

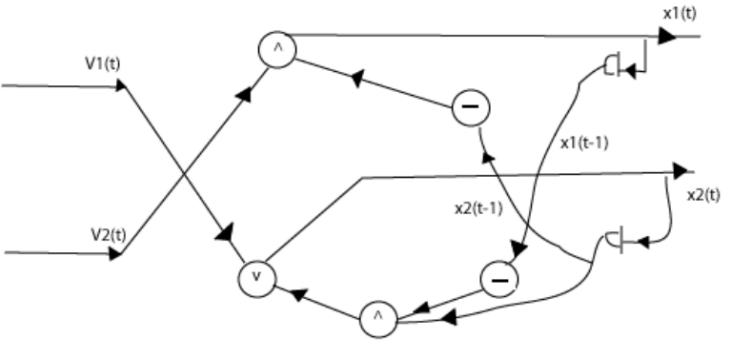


Рис. 88. Схема из функциональных элементов функций переходов

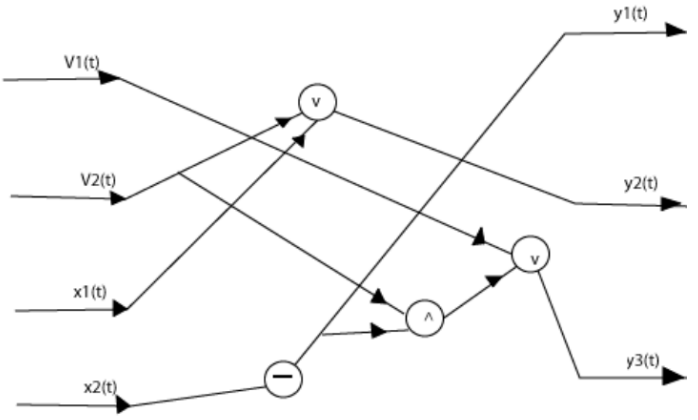


Рис. 89. Схема из функциональных элементов функций выходов

Аналогично строятся схемы из функциональных элементов для функций переходов и выходов, выраженных в системе $\{\oplus, \wedge, 1\}$ или в любой другой полной системе булевых функций.

Заключение

В учебном пособии рассмотрены основные разделы дискретной математики и математической логики, знание которых необходимо для специалистов в области математического моделирования и систем управления: множества, отношения и соответствия, графы, алгоритмы на графах, транспортные сети, математическая логика, конечные автоматы.

Теоретический материал изложен простым и понятным языком, сопровождается большим количеством подробно разобранных примеров и иллюстраций, которые способствуют более легкому и глубокому усвоению нового материала.

Авторы стремились охватить наиболее важные темы дискретной математики и математической логики, однако представленные в пособии сведения являются лишь малой частью всего многообразия понятий и алгоритмов, изучаемых в этих разделах математики. Так, в пособие не вошли разделы по алгебраическим структурам, по теории сложности алгоритмов, по теории кодирования, по логическим исчислениям и др.

Данное пособие нужно рассматривать только как первое знакомство с некоторыми темами дискретной математики и математической логики и продолжать их изучение самостоятельно.

Библиографический список

1. Акимов, О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы [Текст] / О.Е. Акимов. – Москва: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 352 с.
2. Аляев, Ю.А. Дискретная математика и математическая логика [Текст] / Ю.А. Аляев, С.Ф. Тюрин. – Москва: Финансы и статистика, 2006. – 386 с.
3. Гуренко, В.В. Введение в теорию автоматов [Электронный ресурс]: электронное учебное издание / В.В. Гуренко. – Москва: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2013. – 62 с.
4. Зыков, А.А. Основы теории графов [Текст] / А.А. Зыков. – Москва: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
5. Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов [Текст]: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин. – Москва: Академия, 2007. – 304 с.
6. Игошин, В.И. Математическая логика и теория алгоритмов [Текст]: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин. – Москва: Академия, 2008. – 448 с.
7. Карпов, Ю.Г. Теория автоматов [Текст]: учеб. для студентов вузов / Ю.Г. Карпов. – Санкт-Петербург: Питер, 2003. – 208 с.
8. Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера [Текст] / О.П. Кузнецов. – Санкт-Петербург: Лань, 2007. – 400 с.
9. Лекции по теории графов [Текст] / Р.И. Емеличев [и др.]. – Москва: Либроком, 2009 – 392 с.
10. Машина Тьюринга и алгоритмы Маркова. Решение задач [Текст]: учебно-методическое пособие / В.Н. Пильщиков [и др.]. – Москва: МГУ, 2006. – 47 с.
11. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов [Текст] / Ф.А. Новиков. – Санкт-Петербург: Питер, 2007. – 368 с.
12. Оре, О. Графы и их применение [Текст] /О. Оре. – Москва: Мир, 1965. – 174 с.

13. Тишин, В.В. Дискретная математика в примерах и задачах [Текст] / В.В. Тишин. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.
14. Шапорев, С.Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий [Текст]: учеб. пособие / С.Д. Шапорев. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
15. Шевелев, Ю.П. Дискретная математика. Ч.1. Теория множеств. Булева алгебра [Текст]: учеб. пособие / Ю.П. Шевелев. – Томск: Государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2003. – 118 с.
16. Шоломов, Л.А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств [Текст] / Л.А. Шоломов. – Москва: Наука, 1980. – 400 с.
17. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику [Текст] / С.В. Яблонский. – Москва: Высшая математика, 2003. – 384 с.